Resolución del ejercicio 4(c) de la práctica 2

1. **Ejercicio (versión corregida)**:

   Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : [t_0, t_0 + A] \times \overline{B_R(x_0)} \to \mathbb{R}^n$ continua y $M := \|f\|_\infty$. Supongamos que existe $g : [t_0, t_0 + A] \times [0, 2R] \to [0, M]$ continua y creciente tal que

   $$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(t, |x - y|)$$

   para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$, $x, y \in \overline{B_R(x_0)}$. Supongamos además que $g(t, 0) \equiv 0$ y que el problema

   $$u'(t) = g(t, u(t)), \qquad u(t_0) = 0$$

   no admite soluciones no triviales. Probar que el esquema de aproximaciones sucesivas

   $$x_0(t) \equiv x_0, \qquad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds$$

   converge uniformemente en $[t_0, t_0 + \delta]$ a una solución (única) del problema

   $$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

   con $\delta = \min\{A, \frac{M}{R}\}$.

   Demostración: en primer lugar, observemos que si $|x_n(t) - x_0| \leq R$ para todo t, entonces $|x_{n+1}(t) - x_0| \leq M\delta \leq R$. Esto prueba que la sucesión está bien definida. Por otra parte,

   $$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\, ds \leq M(t - t_0).$$

   Por inducción, si llamamos $u_0(t) := M(t - t_0)$ y suponemos que para cierta función u_{n-1} vale $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq u_{n-1}(t)$, entonces

   $$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_{t_0}^{t} g(s, |x_n(s) - x_{n-1}(s)|)\, ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s, u_{n-1}(s))\, ds.$$

En otras palabras, definiendo $u_n(t) := \int_{t_0}^t g(s, u_{n-1}(s))\, ds$ entonces resulta $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq u_n(t)$ y además

$$u_1(t) = \int_{t_0}^t g(s, u_0(s))\, ds \leq M(t - t_0) = u_0(t),$$

de donde se deduce que

$$u_0(t) \geq u_1(t) \geq u_2(t) \geq \ldots \geq 0.$$

En particular, u_n converge puntualmente a cierta función u que satisface

$$u(t) = \int_{t_0}^t g(s, u(s))\, ds,$$

es decir:

$$u'(t) = g(t, u(t)), \qquad u(t_0) = 0.$$

Concluimos que $u \equiv 0$. Además, como $x'_{n+1}(t) = f(t, x_n(t))$ resulta $\|x'_n\|_\infty$ acotada y por Arzelá-Ascoli existe una subsucesión x_{n_j} que converge uniformemente a cierta función x. Como $|x_{n+1} - x_n|$ converge uniformemente a 0, vale que x_{n_j+1} también converge uniformemente a x, y se deduce que x es solución del problema. Finalmente, observemos que si una subsucesión de x_n no converge uniformemente a x, entonces usando otra vez Arzelá-Ascoli podemos suponer que converge uniformemente a cierta $y \neq x$ que también es solución, con $y(t) \in \overline{B_R(x_0)}$ para todo t. Pero en tal caso $v(t) := |x(t) - y(t)|$ satisface:

$$v(t) \leq \int_0^t g(s, v(s))\, ds \leq u_0(t)$$

e inductivamente

$$v(t) \leq \int_0^t g(s, u_{n-1}(s))\, ds = u_n(t),$$

lo que prueba que $v \equiv 0$.

2. *Mea culpa* y nuevo ejercicio: la demostración anterior no se deduce del ejercicio 4(b). ¿Se podrá reformular este ejercicio de alguna manera para que 4(c) salga como consecuencia directa?