# Análisis no lineal - Práctica $[4, +\infty)$
# (primera parte)

## 1 Grado de Brouwer

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua. Supongamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x) - x_0 \neq t(x - x_0)$ para todo $t > 1$ y todo $x \in \partial\Omega$. Probar que $f$ tiene un punto fijo.

2. Sea $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante tal que $f(\partial B) \subset \partial B$. Probar que

$$\sum_{n\geq 1} n \left( \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \right)^2 \in \mathbb{N}.$$

3. Probar la siguiente generalización del teorema fundamental del álgebra: si $P(z, \overline{z})$ es un polinomio de grado menor que $n$ entonces la ecuación $z^n = P(z, \overline{z})$ tiene al menos una solución. ¿Es cierto que tiene como máximo $n$ soluciones?

4. Probar el siguiente "teorema de la función implícita": sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ continua con $f(x_0, y_0) = 0$ para cierto $(x_0, y_0) \in U \times V$. Si $f(x, \cdot) : V \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x$, entonces existen $U_0 \subset U$ entorno de $x_0$, $V_0 \subset V$ entorno de $y_0$ y una única $\phi : U_0 \to V_0$ continua tal que $\phi(x_0) = y_0$ y $f(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in U_0$.

5. Sea $G : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente y sublineal Lipschitz en $x$. Probar que si $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el operador de Poincaré asociado al problema $x'(t) + x(t) = G(t, x(t))$, entonces $deg(I \pm P, B_R(0), 0) = 1$ para todo $R$ suficientemente grande.

6. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función par de clase $C^1$. Probar que el problema anti-periódico

$$\begin{cases} x'(t) = \nabla F(x(t)) + p(t) & t \in (0, 1) \\ x(0) + x(1) = 0 \end{cases}$$

tiene solución para cualquier $p : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ continua.

*Sugerencia*: cambiando $F(x)$ por $F(x) - \frac{|x|^2}{2}$, que también es una función par, alcanza con probar que el problema $x'(t) + x(t) = \nabla F(x(t)) + p(t)$ tiene una solución anti-periódica. Multiplicando por $x'(t)$ e integrando en $[0,1]$ se prueba que si $x$ es solución entonces $\|x'\|_{L^2} \leq \|p\|_{L^2}$. Por otra parte, escribiendo $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,ds = x(1) - \int_t^1 x'(s)\,ds$ se obtiene que $2|x(t)| \leq \|p\|_{L^2}$ para todo $t$. Luego, se puede considerar que $\nabla F$ es una función acotada y el resultado se deduce del ejercicio anterior.

7. Sea $f : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en $u$. Supongamos que existe un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al 0 tal que

   (a) Para todo $\lambda \in [0,1]$ y todo $v_0 \in \overline{\Omega}$, la solución $u_{\lambda,v_0}$ del problema de valores iniciales

   $$\begin{cases} u''(t) = \lambda f(t, u(t), u'(t)) & t \in (0,1) \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = v_0 \end{cases}$$

   está definida en $[0,1]$.

   (b) Si $v_0 \in \partial\Omega$, entonces $u_{\lambda,v_0}(1) \neq 0$.

   Probar que el problema de Dirichlet

   $$\begin{cases} u''(t) = \lambda f(t, u(t), u'(t)) & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

   tiene al menos una solución $u$ tal que $u'(0) \in \Omega$.

8. Probar que la ecuación en diferencias

   $$\begin{cases} \Delta^2 y(t) = f(t, y(t)) & t = 0, \dots, n-2 \\ y(0) = y(n) = 0. \end{cases}$$

   con $f : \{0, \dots, n-2\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente o sublineal en la segunda coordenada tiene al menos una solución. Generalizar para un sistema de ecuaciones.