Análisis no lineal - Práctica $[4, +\infty)$
(segunda parte)

Grado de Leray-Schauder

1. Extender el teorema de Borsuk (y sus consecuencias) para funciones del tipo $F = I - K$ impares en un espacio de Banach.

2. Sean $\hat{x}, r \in l^2(\mathbb{R})$ y sea $\mathcal{C}$ el cubo de Hilbert definido como

$$\mathcal{C} := \{x \in l^2 : |x_i - \hat{x}_i| \leq |r_i| \quad \text{para todo } \ i\}.$$

   Probar que si $F : \mathcal{C} \to l^2$ es continua y satisface

$$F_i(y) \leq 0 \leq F_i(z)$$

   para todo par de elementos $y, z \in \mathcal{C}$ tales que $y_i = \hat{x}_i - r_i$, $z_i = \hat{x}_i + r_i$, entonces F tiene al menos un cero.

3. (a) Dar un ejemplo de retracción continua $r : \overline{B} \to \partial B$ donde B es una bola en un espacio de Banach.

   (b) Usando la retracción obtenida en el item anterior, dar un ejemplo de $h : \overline{B} \times [0, 1] \to E\backslash\{0\}$ continua tal que $h(x, 0) = cte$ y $h(x, 1) = x$ para todo $x \in \partial B$. ¿Contradice esto la invariancia por homotopía del grado de Leray-Schauder?

4. Dada $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, probar usando grado que la ecuación $u''(t) = f(t, u(t))$ con condición de Dirichlet $u(0) = u_0, u(1) = u_1$ tiene solución en los siguientes casos:

   (a) f sublineal en u.

   (b) f monótona creciente en u.

   (c) $f(t, u) \cdot u \geq 0$ para $|u| = R \geq |u_0|, |u_1|$.

   Generalizar para $f(t, u, u')$ con una condición de crecimiento apropiada.

5. Sean $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ continuas y T-periódicas en t. Supongamos que g es estrictamente monótona en u y sea $\phi(u) := \int_0^T g(t, u)\, dt$.

(a) Probar que $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Im}(\phi)$ es un homeomorfismo.

(b) Si $\int_0^T a(t)\,dt \in \mathrm{Im}(\phi)$, entonces el problema con retardo

$$u'(t) = -a(t) + g(t, u(t-\tau))$$

tiene al menos una solución T-periódica para cualquier $\tau > 0$.

6. Consideremos el problema periódico $u'' + g(u) = p(t)$ para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $p \in L^2(0,1)$ de promedio 0. Probar:

(a) Si existe $R > 0$ tal que $g(-u) \geq 0 \geq g(u)$ para $u > R$, el problema tiene solución.

(b) Si g es acotada, existe una constante r que depende solo de $\|g\|_\infty$ y $\|p\|_{L^2}$ tal que cualquier solución u periódica del problema $u'' = \lambda(p - g(u))$ con $\lambda \in (0,1)$ verifica $\|u'\|_{L^2} < r$.

(c) Sea g acotada y r como en el item anterior. Si existen intervalos $I_\pm$ tales que $long(I_\pm) \geq 2r$ y $\pm g(u) > 0$ para $u \in I_\pm$, entonces el problema tiene solución.

(d) Probar que la ecuación $u'' + \operatorname{sen} u^{1/3} = p(t)$ tiene solución periódica para cualquier p de promedio 0.

7. Sean ahora $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ acotada y $p \in L^2((0,1), \mathbb{R}^N)$ de promedio 0. Supongamos que existen los límites radiales

$$g_v := \lim_{s \to +\infty} g(sv)$$

y son uniformes para $v \in S^{N-1} := \partial B_1(0)$. Probar que si

(a) $g_v \neq 0$ para todo $v \in S^{N-1}$.

(b) $deg(g, B_R(0), 0) \neq 0$ para R suficientemente grande.

entonces el problema periódico para el sistema $u'' + g(u) = p(t)$ tiene al menos una solución.

8. Demostrar el teorema de Lazer-Leach (ver práctica 1) empleando teoría de grado.