Análisis no lineal - Práctica 3 y pico

1. Dada la ecuación $u'' - \varphi(t)u = f(t,u,u')$, donde $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ es continua y sublineal en (u,u') y $\varphi \in C([0,1])$ satisface $\varphi(t) \geq 0$ para todo t, probar:

   (a) El problema de Dirichlet tiene al menos una solución.

   (b) Si además $\varphi \not\equiv 0$, entonces el problema periódico y el de Neumann tienen solución.

2. Condición de Hartman-Nagumo:

   Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que

   $$f(t,u,v) \cdot u + |v|^2 \geq 0 \qquad \text{para } u,v \in \mathbb{R}^n \text{ con } |u| = R,\ v \perp u$$

   y

   $$|f(t,u,v)| \leq c\left(u \cdot f(t,u,v) + |v|^2\right) + K$$

   para $|u| \leq R$ y ciertas constantes c, K con $cR < 1$. Probar que el problema de Dirichlet

   $$\begin{cases} u'' = f(t,u,u') \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

   con $|u_0|, |u_1| \leq R$ tiene al menos una solución. Deducir un resultado análogo para las condiciones periódicas.

   Sugerencia: obtener cotas para $u'(t)$ a partir de la identidad

   $$u'(t) = u(1) - u(0) + \int_0^t s u''(s)\, ds - \int_t^1 (1-s) u''(s)\, ds.$$

3. Sean $\alpha \leq \beta$ respectivamente una sub y una super solución del problema $u''(t) = f(t,u,u')$ con condición de Dirichlet o periódica. Supongamos que

   $$|f(t,u,v)| \leq \varphi(|v|)$$

   para todo t, $\alpha(t) \leq u \leq \beta(t)$ y $|v| \leq R$ para cierto R suficientemente grande. Sea $r = |u_1 - u_0|$ en el caso Dirichlet o $r = 0$ en el caso periódico. Probar que si

   $$\int_r^R \frac{1}{\varphi(s)} ds > 1$$

   entonces el problema tiene al menos una solución.

4. Probar que el problema

$$\begin{cases} u' = u^4 + \cos(t) - 1 \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

tiene al menos una solución u tal que $\mathrm{sen}(t) \leq u(t) \leq \mathrm{sen}(t) + 2$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

5. Probar que el problema

$$u'' = p(t) + u^5 + g(t, u')$$

con $p : [0, T] \to \mathbb{R}$ y $g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y g acotada tiene al menos una solución T-periódica.

6. Probar que la ecuación del péndulo forzado admite soluciones T periódicas para $\|p\|_\infty \leq 1$.

7. Consideremos la ecuación $u'' = f(t, u, u')$, con $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|f(t, u, v)| \leq c(u)(1 + v^2)$$

para cierta función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua. Probar que para todo $k > 0$ existe $R = R(k)$ tal que si u es una solución tal que $|u(t)| \leq k$ en $[0, T]$ entonces $|u'(t)| \leq R$. Deducir un resultado de existencia de soluciones bajo distintas condiciones de contorno.

Sugerencia: si $u' \neq 0$ en (t_0, t_1) y por ejemplo $u'(t_0) = 0$, escribir a t como función de u y definir $u_0 = u(t_0)$, $p(u) = u'(t)$ y $q = p^2$. Entonces

$$\frac{dq}{du} \leq 2c(1 + q(u)), \qquad q(u_0) = 0,$$

de donde se deduce una cota para q. Analizar por separado el caso en que u' no se anula en $[0, T]$, empleando el teorema de Lagrange.

8. Probar que la ecuación

$$u''(t) + u'(t)^2 = -1$$

con condición de Dirichlet $u(0) = u(T) = 0$ no tiene solución para $T \geq \pi$. ¿Contradice esto el ejercicio anterior?

   (a) Probar que el problema

$$\begin{cases} u'' = u^3 + u \\ u(0) = u_0, \\ \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0 \end{cases}$$

   tiene al menos una solución. Puede haber más de una?

(b) Sea $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(t, u) sgn(u) \geq 0$ para $|u| \gg 0$. Supongamos además que para todo $M > 0$ existe $\varphi_M \in L^1(0, +\infty)$ tal que $|f(t, u)| \leq \varphi_M(t)$ para $|u| \leq M$. Probar que el problema

$$\begin{cases} u'' = f(t, u) \\ u'(0) = u_0, \\ \lim_{t \to +\infty} u'(t) = 0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución.

9. Sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y decreciente en u.

   (a) Probar que la aplicación $\mathcal{T} : C([0, T]) \times \mathbb{R}^2 \to C^2([0, T])$ que a cada (p, u_0, u_T) le hace corresponder la única solución del problema

   $$u'' + f(t, u) = p(t) \qquad u(0) = u_0,\ u(T) = u_T$$

   está bien definida y es continua.

   (b) Probar que si se piensa $\mathcal{T} : C([0, T]) \times \mathbb{R}^2 \to C([0, T])$, entonces $\mathcal{T}$ es compacta (es decir: es continua, y envía conjuntos acotados en conjuntos de clausura compacta).

   (c) Dada $p \in C([0, T])$, probar que el conjunto

   $$S(p) = \{u \in C^2([0, T]) : u'' + f(t, u) = p(t)\}$$

   es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Interpretar este hecho como una generalización del resultado conocido para la ecuación lineal

   $$u'' + \varphi(t) u = p(t) \qquad \text{con} \quad \varphi \leq 0.$$

   ¿Cómo es $S(p)$ en este caso?

10. (a) Sea $\tilde{f} : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente en u, y sea $\tilde{u}$ una función que verifica

    $$\tilde{u}'' = \tilde{f}(t, \tilde{u}) \qquad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0,\ \tilde{u}(1) = \tilde{u}_1.$$

    Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que si

    $$\|f - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon, \qquad |u_0 - \tilde{u}_0| < \varepsilon, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| < \varepsilon$$

    entonces el problema

    $$u'' = f(t, u) \qquad u(0) = u_0,\ u(1) = u_1 \tag{1}$$

    tiene al menos una solución. ¿Es única?

    (b) Expresar el resultado de (10a) en términos de la topología del conjunto

    $$\{(f, u_0, u_1) : (1) \text{ tiene solución}\} \subset C([0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2.$$

11. Desarrollar los métodos de Newton y de cuasilinealización para la ecuación del péndulo.