Análisis no lineal - Práctica 2

1. Encontrar un ejemplo de un espacio métrico completo X y una función $T : X \to X$ sin puntos fijos tal que

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \in X,\ x \neq y.$$

¿Puede elegirse X compacto?

2. Probar que si $f : [0, T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz en (u, u') con constante L suficientemente pequeña, entonces el sistema

$$\begin{cases} u''(t) - a(t)u(t) = f(t, u, u') \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \end{cases}$$

tiene solución única para cualquier función continua $a : [0, T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Generalizar para condiciones de Neumann y periódicas.

3. Definir un esquema de aproximaciones sucesivas de Picard para el problema anterior.

4. Sea X un espacio métrico completo, y sea $T : X \to X$ tal que $\overline{T(X)}$ es compacto y

$$d(T(x), T(y)) \leq G(d(x, y)) \qquad \text{si } d(x, y) \leq R$$

en donde $G : [0, R] \to [0, R)$ es continua y satisface:

- G es creciente.
- $G(r) = r \iff r = 0$.

(a) Probar que si $d(T(u_0), u_0) < R$ para cierto $u_0 \in X$, entonces el esquema de aproximaciones sucesivas dado por $u_{n+1} = T(u_n)$ converge a un punto fijo de T.

(b) Probar que la distancia entre dos puntos fijos diferentes es mayor que R.

(c) Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sea $f : [t_0, t_0 + A] \times \overline{B_R(x_0)} \to \mathbb{R}^n$ continua y sea $M := \|f\|_\infty$. Supongamos que existe $g : [t_0, t_0 + A] \times [0, 2R] \to [0, M]$ continua y creciente tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(|x - y|)$$

para $t_0 \le t \le t_0 + A$, $x, y \in \overline{B_R(x_0)}$. Supongamos además que $g(t,0) \equiv 0$ y que el problema

$$u'(t) = g(t, u(t)), \qquad u(t_0) = 0$$

no admite soluciones no triviales. Probar que el esquema de aproximaciones sucesivas

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds$$

converge uniformemente en $[t_0, t_0 + \delta]$ a una solución (única) del problema

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

con $\delta = \min\{A, \frac{r}{R}\}$.

5. Sean E, F espacios normados y $f : E \to F$ de clase C^1.

   (a) Probar que para todo $x, y \in E$ vale

   $$\|f(x) - f(y)\| \le M\|x - y\|$$

   donde $M := max_{t\in[0,1]}\|Df(tx + (1-t)y)\|$.
   Sugerencia: dado $\varepsilon > 0$, definir la función

   $$\varphi(t) := \|f(tx + (1-t)y) - f(y)\| - (M + \varepsilon)t\|x - y\|$$

   y probar que $\sup\{t \in [0,1] : \varphi(t) \le 0\} = 1$.

   (b) Deducir que si $E = F$ y $\|Df(x)\| \le \alpha < 1$ para todo x entonces f tiene un único punto fijo.

6. Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente Lipschitz y monótona creciente en u, es decir:

   $$[f(t,u) - f(t,v)] \cdot (u - v) \ge 0$$

   para todo $t \in [0,1]$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dado $w \in L^2((0,1), \mathbb{R}^n)$, definimos $u_w(t)$ como la única solución del problema

   $$u''(t) = f(t, W(t)), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

   donde $W(t) := \int_0^t w(s)\, ds$. Consideremos ahora

   $$H := \{w \in L^2((0,1), \mathbb{R}^n) : \int_0^1 w(t)\, dt = 0\}$$

   y el operador $T : H \to H$ dado por $Tw := u_w'$.

   (a) Probar que T está bien definido y es monótono decreciente.

(b) Deducir que el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

tiene una única solución.

(c) Mostrar que si f es además continuamente derivable respecto de u, entonces el resultado se deduce del teorema de la función implícita.

7. (a) Usando el TFI, probar que existe $\lambda_0 > 0$ tal que el problema

$$u''(t) + \lambda e^{u(t)} = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

tiene solución para $0 < \lambda < \lambda_0$.

(b) Probar que toda solución es positiva en $(0, 1)$.

(c) Probar que si λ es chico el problema tiene dos soluciones, y si λ es grande el problema no tiene soluciones.

Sugerencia: multiplicar la ecuación por $u'(t)$ e integrar. Observar que u es simétrica y alcanza un único máximo M en $t = \frac{1}{2}$, con

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^M \frac{dv}{\sqrt{e^M - e^v}} = \frac{1}{2}.$$

Recíprocamente, probar para cada M que verifica la igualdad anterior existe una solución u con $\|u\|_\infty = M$.

8. Dado $a \notin \mathbb{N}_0^2$, probar que la ecuación del péndulo forzado

$$u''(t) + a \sin u(t) = p(t)$$

admite soluciones 2π-periódicas para cualquier $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua 2π-periódica tal que $\|p\|_\infty$ es suficientemente chica.