Análisis no lineal - Práctica 1

1 Shooting 1-dimensional

1. Probar que la ecuación del péndulo forzado con fricción

$$u''(t) + au'(t) + b\sin(u(t)) = p(t) \tag{1}$$

con $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua admite al menos una solución para las condiciones de Dirichlet

$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1.$$

¿Vale un resultado análogo para las condiciones periódicas

$$u(0) = u(1), \qquad u'(0) = u'(1)?$$

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y acotada tal que

$$g(0) = 0, \qquad [(2k-1)\pi]^2 < g'(0) < [2k\pi]^2$$

para cierto entero k. Probar que el problema de Dirichlet

$$u''(t) + g(u(t)) = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos dos soluciones además de la trivial $u \equiv 0$.

Sugerencia: considerar la función diferenciable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(\lambda) = u_\lambda(1)$, entonces $\phi(0) = 0$ y $\phi(-\lambda) < 0 < \phi(\lambda)$ para $\lambda > \|g\|_\infty$. Luego probar que $\phi'(0) = w_0(1)$, donde w_0 es la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} w_0''(t) + g'(0)w_0(t) = 0 \\ w_0(0) = 0, \quad w_0'(0) = 1 \end{cases}$$

y ver que $\phi'(0) < 0$.

2 Teorema de Brouwer - Shooting 2-dimensional

1. Probar que el teorema de Brouwer en el plano es equivalente a:

   (a) No hay retracciones de la bola unitaria cerrada en su borde.

(b) Si $\phi : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$ es continua y satisface $\phi(x) \cdot x \geq 0$ para $x \in \partial B$, entonces ϕ tiene al menos un cero.

(c) (Poincaré-Miranda) Si $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ es continua y satisface

$$f_1(-1,y) \leq 0 \leq f_1(1,y) \qquad \text{para todo } \; y \in [-1,1]$$

$$f_2(x,-1) \leq 0 \leq f_2(x,1) \qquad \text{para todo } \; x \in [-1,1]$$

entonces f tiene al menos un cero.

(d) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua y existe C tal que $\|f(x) - x\| \leq C$ para todo x, entonces f tiene al menos un cero.

2. Probar que el axioma de completitud de los números reales puede ser reemplazado por cualquiera de los enunciados del problema anterior. Más aún, puede suponerse que todas los funciones involucradas son de clase C^2.

3. Usar el índice de una curva para demostrar en forma directa cada uno de los enunciados del problema 1.

4. (*Condición de Hartman*) Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que existe una constante positiva R tal que

$$f(t,u) \cdot u > 0 \qquad \text{para todo } \; t \in [0,1], u \in \partial B_R(0).$$

Probar que el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

tiene al menos una solución para todo $u_0, u_1 \in \overline{B}_R(0)$.

5. (*Condición de monotonía*) Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$[f(t,u) - f(t,v)] \cdot (u - v) > 0$$

para todo $(t,u), (t,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Probar que el problema (2) tiene solución única para todo $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^2$.

6. Extender los resultados de 4 y 5 para f continua.

3 Operador de Poincaré

1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , T-periódica en t y sublineal en x, es decir:

$$f(t+T, x) = f(t,x) \qquad \text{para todo } (t,x),$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(t,x)}{\|x\|} = 0 \qquad \text{uniformemente en } t.$$

(a) Probar que el problema

$$x'(t) + x(t) = f(t, x(t))$$

admite al menos una solución T-periódica.

(b) Probar que el problema

$$x'(t) - x(t) = f(t, x(t))$$

admite al menos una solución T-periódica.

2. Sean $f, g : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

   (a) $|f(t, x, y)| \leq M$ para $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$.

   (b) $|g(t, x, y)| \leq C(x)$ para $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$, con $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

   (c) Existe $R > 0$ tal que

   $$f(t, x, y) \geq 0 \geq f(t, -x, y)$$

   para cada (t, x, y) con $x \geq R$, y

   $$g(t, x, y) \geq 0 \geq g(t, x, -y)$$

   para cada (t, x, y) con $y \geq R$.

   Probar que el problema

   $$\begin{cases} x' = f(t, x(t), y(t)) \\ y' = g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

   admite al menos una solución.

3. Probar el *teorema de Lazer-Leach*: sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que los límites

   $$g(\pm\infty) := \lim_{u \to \pm\infty} g(u)$$

   existen y sea $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función 2π-periódica. Supongamos que

   $$\sqrt{A^2 + B^2} < 2(g(+\infty) - g(-\infty)).$$

   donde

   $$A := \int_0^{2\pi} p(t) \cos(t)\, dt, \qquad B := \int_0^{2\pi} p(t) \sin(t)\, dt.$$

   Entonces el problema

   $$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t)$$

tiene al menos una solución 2π-periódica

Sugerencia: suponer primero que g es suave y definir la función

$$F(x, y) := (y - u'_{x,y}(2\pi), u_{x,y}(2\pi) - x)$$

en donde $u_{x,y}$ es la solución de la ecuación con valores iniciales $u_{x,y}(0) = x, u'_{x,y}(0) = y$ Usando coordenadas polares $(x, y) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, probar que si r es grande entonces $F(x, y)\cdot(x, y) > 0$ para $(x, y) \in \partial B_r(0)$.