Práctica 0 - Segunda parte

1 La ecuación lineal de segundo orden

1. Probar que el problema
$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = \psi(t)$$
con $a, b, \psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ continuas, es equivalente a la ecuación $Lu = \varphi(t)$, en donde
$$Lu(t) = (-p(t)u'(t))' + q(t)u(t)$$
para ciertas $q, \varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ continuas y cierta $p : [0, T] \to \mathbb{R}_{>0}$ de clase C^1.

2. Sea L como en el ejercicio anterior, y sea $\{u_1, u_2\}$ una base de soluciones del problema homogéneo $Lu = 0$. Probar que $w = p(u_1u_2' - u_2u_1')$ es una constante no nula.

3. Sean L, u_1, u_2 y w como antes, y sea $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que todas las soluciones de la ecuación $Lu = \varphi$ son de la forma $u = c_1u_1 + c_2u_2$, con
$$c_1 = k_1 + \frac{1}{w}\int_0^t u_2(s)\varphi(s)\, ds,$$
$$c_2 = k_2 - \frac{1}{w}\int_0^t u_1(s)\varphi(s)\, ds.$$

4. Sea L como antes. Probar que si el problema de Dirichlet
$$Lu = 0, \qquad u(0) = u(T) = 0$$
admite solamente la solución trivial, entonces el problema no homogéneo
$$Lu = \varphi, \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T$$
tiene una única solución para cualquier φ continua y cualquier dato de borde $(u_0, u_T) \in \mathbb{R}^2$. Obtener conclusiones similares para las condiciones de Neumann
$$u'(0) = u_0, \qquad u'(T) = u_T$$
y periódicas
$$u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T).$$

5. Sea L como antes, con $q \geq 0$. Probar que para toda función continua φ el problema
$$Lu = \varphi, \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T,$$
tiene solución única. Puede decirse lo mismo para las condiciones de Neumann o periódicas?

6. Sea L como antes, y sea $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente en u. Probar que el problema
$$Lu = f(t,u), \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T$$
tiene *a lo sumo* una solución.

7. *Desigualdad de Poincaré*: existe una constante c tal que si $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua con $u(0) = u(T) = 0$, entonces
$$\|u\|_{L^2(0,T)} \leq c\|u'\|_{L^2(0,T)}.$$
Comentario: veremos en 3 que la constante óptima es $c = \frac{T}{\pi}$.

8. *Desigualdad de Wirtinger*: existe una constante c tal que si $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua con $u(0) = u(T)$ y $u'(0) = u'(T)$, entonces
$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(0,T)} \leq c\|u'\|_{L^2(0,T)}$$
en donde $\overline{u}$ es el promedio de u, dado por $\overline{u} := \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$. *Comentario*: en este caso, la constante óptima es $c = \frac{T}{2\pi}$.

9. Probar que existe una constante c tal que si u' es absolutamente continua y $u'(t_0) = 0$ para algún t_0 entonces
$$\|u'\|_{L^\infty(0,T)} \leq c\|u''\|_{L^2(0,T)}.$$
Generalizar para un operador L como antes.

2 La función de Green

En esta sección veremos que, en ocasiones, la única solución de un problema lineal $Lu = \varphi$ se puede expresar en términos de un operador integral (el inverso de L), aplicado a φ.

Vamos a encontrar esta expresión por medio de un cálculo directo cuando se trata el problema lineal
$$\{\, u'' = \varphi(t) u(0) = u(T) = 0.$$
En efecto, podemos escribir
$$u'(t) = c + \int_0^t \varphi(s)ds = c + \int_0^T \chi_{[0,t)}(s)\varphi(s)ds,$$

y entonces

$$u(t) = \int_0^t \left(c + \int_0^T \chi_{[0,r)}(s)\varphi(s)ds \right) dr = ct + \int_0^T \chi_{[0,t}(r) \left(\int_0^T \chi_{[0,r)}(s)\varphi(s)ds \right) dr$$

$$= ct + \int_0^T \varphi(s) \left(\int_0^T \chi_{[0,t)}(r)\chi_{[s,T]}(r)dr \right) ds = ct + \int_0^T \varphi(s)\psi(t,s)ds,$$

donde

$$\psi(t,s) = \begin{cases} 0t \leq s \\ t - ss < t. \end{cases}$$

Además, como $u(T) = 0$, vale:

$$c = -\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s)\psi(\alpha, s)ds = -\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s)(T-s)ds.$$

Luego

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi(s)ds,$$

en donde

$$G(t,s) = \{ -\frac{t}{T}(T-s)t \leq s - \frac{s}{T}(T-t)t > s.$$

La función $G : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ se denomina *función de Green* del problema.

1. Deducir una expresión similar para condiciones de Dirichlet no homogéneas.
2. Generalizar para condiciones de Neumann y periódicas.
3. Generalizar para un operador L como en los ejercicios anteriores, y calcular explícitamente la función de Green para el caso $Lu = u'' - \lambda u$, con $\lambda > 0$.

3 Desigualdades de Poincaré y Wirtinger

En muchas de las aplicaciones que hemos visto resulta de gran importancia la llamada *desigualdad de Poincaré*:

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{T}{\pi}\|u'\|_{L^2}.$$

Esta fórmula es válida para cualquier función u del espacio de Sobolev

$$H_0^1(0,T) := \{u : [0,T] \to \mathbb{R} \text{ abs. continua} : u(0) = u(T) = 0, u' \in L^2(0,1)\}.$$

En el ejercicio 7 se propone la existencia de “alguna” constante c que permite acotar la norma de u mediante la norma de su derivada; veremos ahora una idea informal (aunque esencialmente válida) que permite demostrar que la constante óptima para esta desigualdad es $\frac{T}{\pi}$, mediante argumentos sencillos. Por simplicidad, trataremos únicamente el caso $T = 1$, la versión más general se obtiene fácilmente mediante un rescale del intervalo.

Supongamos que queremos minimizar la funcional

$$I(u) = \int_0^1 u'(t)^2 \, dt$$

definida sobre $H_0^1(0,1)$, sujeta a la condición $J(u) = 1$, con

$$J(u) = \int_0^1 u(t)^2 \, dt.$$

Es posible probar que I restringida al conjunto $\{u : J(u) = 1\}$ alcanza un mínimo absoluto u_1, que además resulta una función suave. En tal caso, por la teoría de multiplicadores de Lagrange[1] existe un número λ_1 tal que $DI(u_1) = \lambda_1 DJ(u_1)$, es decir:

$$\int_0^1 u_1'(t)\varphi'(t) \, dt = \lambda_1 \int_0^1 u_1(t)\varphi(t) \, dt$$

para toda φ. Integrando por partes el término de la izquierda, obtenemos:

$$\int_0^1 (u_1''(t) + \lambda_1 u_1(t))\varphi(t) \, dt = 0$$

Además, como la igualdad vale para toda φ, entonces

$$u_1'' + \lambda_1 u_1 = 0.$$

Pero esta ecuación es fácil de resolver: como u_1 se anula en 0, tiene que ser $u_1(t) = a\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_1}t)$ en donde a es una constante apropiada de modo que valga $\int_0^1 u_1(t)^2 \, dt = 1$. Por otra parte, $u_1(1) = 0$, de donde $\sqrt{\lambda_1} = k\pi$. Finalmente, observemos que

$$I(u_1) = \int_0^1 u_1'(t)^2 \, dt = -\int_0^1 u_1''(t)u_1(t) \, dt = \lambda_1 \int_0^1 u_1(t)^2 \, dt = \lambda_1.$$

Entonces, como u_1 es un mínimo absoluto, se deduce que $k = 1$, es decir: $\lambda_1 = \pi^2$. De esta forma,

$$\min_{\|u\|_{L^2}=1} \int_0^1 u'(t)^2 \, dt = \pi^2,$$

en donde el mínimo se toma sobre el espacio $H_0^1(0,1)$. Esto dice que si $u \in H_0^1(0,1)$ es distinta de 0, entonces tomando $w = \frac{u}{\|u\|_{L^2}}$ vale $\int_0^1 w'(t)^2 \geq \pi^2$, o equivalentemente

$$\int_0^1 u'(t)^2 \geq \pi^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

[1] Este hecho es consecuencia inmediata del *Teorema de la función implícita*

como queríamos demostrar.

En realidad, existe una demostración mucho más elemental, que es la siguiente: dado $u \in C^1([0,1])$ tal que $u(0) = 0$, definimos

$$\phi(t) = u^2(t)\mathrm{cotg}(\pi t),$$

que resulta continua en $[0, \frac{1}{2}]$, y $\phi(0) = 0$. Entonces

$$\phi'(t) = 2u(t)u'(t)\mathrm{cotg}(\pi t) - \pi u^2(t)(1 + \mathrm{cotg}^2(\pi t))$$

$$= \left(\frac{u'(t)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 - \pi u^2(t) - \left(\sqrt{\pi}u(t)\mathrm{cotg}(\pi t) - \frac{u'(t)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \leq \frac{u'(t)^2}{\pi} - \pi u^2(t).$$

Integrando, resulta

$$0 = \phi\Big|_0^{1/2} \leq \int_0^{1/2} \frac{u'(t)^2}{\pi} - \pi u^2(t)\, dt,$$

de donde sale que

$$\int_0^{1/2} u^2(t)\, dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{1/2} u'(t)^2\, dt.$$

En forma análoga se prueba que si $u(1) = 0$, entonces

$$\int_{1/2}^1 u^2(t)\, dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{1/2}^1 u'(t)^2\, dt,$$

y sumando las dos desigualdades cuando $u(0) = u(1) = 0$ se obtiene el resultado. El caso general para u absolutamente continua se deduce en forma inmediata del hecho (bastante elemental) de que $C_0^1([0,1])$ es denso en $H_0^1(0,1)$.

Cabe aclarar que, aunque parece más complicada, la otra “demostración” es mucho más general, pues se aplica a otros operadores lineales diferentes de u''.

Los anteriores argumentos pueden modificarse para probar también que la constante óptima para la desigualdad de Wirtinger (ver el ejercicio 8 de la sección 1) es $\frac{T}{2\pi}$.