Análisis no lineal - Práctica 0

"Repaso" de ecuaciones ordinarias (primera parte)

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $(t_0, x_0) \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz en x. Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una (única) solución $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ para cierto $\delta > 0$. Dar una cota inferior para δ.

2. **Lema de Gronwall**: Sean $u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continuas tales que

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds$$

para todo t y cierto $\alpha \geq 0$. Entonces

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

para todo t.

3. **Dependencia continua**:

Sean Ω, $(t_0, x_0) \in \Omega$, f y $x(t)$ como en el ejercicio 1, y consideremos un punto $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in B_r(t_0, x_0)$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Probar que la solución $\tilde{x}$ del problema

$$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t,\tilde{x}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

verifica

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \alpha e^{L|t-t_0|}$$

para ciertas constantes $\alpha = \alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0), L \geq 0$, y t cerca de t_0, en donde α verifica: $\alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to 0$ para $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to (t_0, x_0)$. Deducir que el flujo Φ definido por $\Phi(t, t_0, x_0) := x(t)$ es una función continua (observación: suponiendo que f es de clase C^1 se puede probar que Φ es de clase C^1).

4. (a) Sean Ω, $(t_0, x_0) \in \Omega$, f como en el ejercicio 1, y sea $K \subset \Omega$ un compacto. Probar que si una solución de $x' = f(t,x)$ definida en $[t_0, t_1)$ no se puede extender hasta t_1, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(t, x(t)) \notin K$ para $t \in (t_1 - \delta, t_1)$. Concluir que si $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \subset \Omega$ entonces $|x(t)| \to \infty$ para $t \to t_1^-$.

   (b) Probar que si $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, localmente Lipschitz en x y tiene crecimiento a lo sumo lineal en x (es decir, $|f(t,x)| \leq a|x| + b$), entonces toda solución del problema $x' = f(t,x)$ puede extenderse a todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

   (c) Sea $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y *globalmente* Lipschitz en x con constante L, y consideremos el operador $T : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \to C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ definido por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

   Probar que para $x, y \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \frac{(t_1 - t_0)^n L^n}{n!} \|x - y\|,$$

   en donde $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n veces). Deducir que si n es grande, T^n es una contracción. ¿Tiene esto alguna relación con el ejercicio (4b)?