“Una pequenã ayuda” para la práctica 4

1 Primera parte

1. Si f no tiene puntos fijos en el borde, se puede encontrar una homotopía entre $f(x) - x$ y la función $x - x_0$.

2. Escribir $f(z) = \sum a_n z^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ y calcular $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$.

3. Sobre bolas de radio grande, la función $z^n - P(z, \overline{z})$ es homotópica a z^n.

4. Definir $F : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Claramente F es inyectiva y continua, y entonces es abierta. Construir ϕ a partir de la preimagen de puntos de la forma $(x, 0)$.

5. Si $x(t)$ es la solución de la ecuación con valor inicial x_0, haciendo la cuenta se ve que $x(t) = x_0 e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} G(s, x(s))\, ds$. En particular, si $|x_0|$ es muy grande se prueba por ejemplo que $\|x\|_\infty \leq 2|x_0|$. Agrandando $|x_0|$, deducir entonces que $|P(x_0) - \frac{x_0}{e}| < \varepsilon |x_0|$ para cualquier ε prefijado y con esto se prueba que $I \pm P$ es homotópica a la identidad.

6. Sugerencia: Seguir la sugerencia!

7. La función $h(v_0, \lambda) = u_{\lambda, v_0}(1)$ está bien definida, es continua y no se anula cuando $v_0 \in \partial\Omega$. ¿Cuánto vale $h(v_0, 0)$?

8. Imitando el caso continuo $y''(t) = f(t, y(t))$, probar:

   (a) El problema lineal $\Delta^2 y(t) = \varphi(t)$ con $y(0) = y(n) = 0$ tiene solución única para toda $\varphi : \{0, \ldots, n-2\} \to \mathbb{R}$.

   (b) Existe una constante c tal que $\|y\| \leq c\|\Delta^2 y\|$ para toda y tal que $y(0) = y(n) = 0$, en donde $\| \cdot \|$ es “alguna” norma apropiada.

   Identificando el espacio de funciones de $\{0, \ldots, n\}$ a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^{n+1}$, el resultado sale usando el grado de Brouwer (o directamente el teorema de Brouwer).

2 Segunda parte

1. Si K es un operador compacto impar, ver que en la construcción de Schauder se puede elegir una ε-aproximación impar.

2. Usar que el cubo de Hilbert es compacto. Se puede reducir a dimensión finita y emplear el teorema de Poincaré-Miranda, o intentar aplicar el grado de Leray-Schauder en forma directa.

3. (a) Teniendo una función continua $f : \overline{B} \to \overline{B}$ sin puntos fijos es fácil construir una retracción.

   (b) Por ejemplo, $r(\lambda x)$ sirve.

4. En cualquiera de los tres casos, se pueden encontrar cotas a priori para la ecuación $u''(t) = \lambda f(t, u(t))$ con la condición de Dirichlet y la teoría de grado se aplica directamente. Si f depende también de u', hay que poner alguna condición tipo Nagumo.

5. (a) Sale directo por la monotonía de g.

   (b) Considerar los espacios $C_T = \{u \in C(\mathbb{R}) : u(t+T) = u(t) \text{ para todo } t\}$ y $\tilde{C}_T = \{u \in C_T : \overline{u} = 0\}$. Dada $\varphi \in \tilde{C}_T$, probar que existe una única $u \in \tilde{C}_T$ tal que $u'(t) = \varphi(t)$ y verificar que el operador $K : \varphi \mapsto u$ es compacto. Sea $N : C_T \to C_T$ dado por $Nu(t) = -a(t)+g(t, u(t-\tau))$. Para $\lambda > 0$, el problema periódico para la ecuación $u' = \lambda Nu$ es equivalente a la ecuación de punto fijo $u = \overline{u} + \overline{Nu} + \lambda K(Nu - \overline{Nu})$. Entonces alcanza con probar que existe un $R > 0$ tal que:

      i. $u' \neq \lambda Nu$ para todo $\lambda \in (0, 1)$ y $u \in C_T$ con $\|u\|_\infty = R$.

      ii. $[\int_0^T a(t)\,dt - \phi(-R)].[\int_0^T a(t)\,dt - \phi(R)] < 0$.

   La última condición es obvia si $\int a(t)\,dt \in Im(\phi)$ por la monotonía de ϕ. Para ver i), supongamos que $u \in C_T$ satisface la ecuación $u'(t) = \lambda(-a(t) + g(t, u(t - \tau)))$. Integrando de los dos lados, y suponiendo por ejemplo que g es creciente en u, se obtiene:

   $$\int_0^T a(t)\,dt = \int_0^T g(t, u(t-\tau))\,dt \leq \int_0^T g(t, u_{max})\,dt = \phi(u_{max}).$$

   De la misma forma, se ve que $\int_0^T a(t)\,dt \geq \phi(u_{min})$, y en consecuencia $u_{min} \leq \phi^{-1}\left(\int_0^T a(t)\,dt\right) \leq u_{max}$. En particular, existe t_0 tal que $u(t_0) = \phi^{-1}\left(\int_0^T a(t)\,dt\right)$. Por otra parte, como a y g son positivas, resulta $|u'(t)| < \lambda(a(t) + g(t, u(t-\tau)))$ y entonces

   $$\int_0^T |u'(t)|\,dt < \int_0^T a(t) + g(t, u(t-\tau))\,dt = 2\int_0^T a(t)\,dt.$$

   Esto muestra que $|u(t) - u(t_0)| = \left|\int_{t_0}^t u'(t)\,dt\right| \leq 2\int_0^T a(t)\,dt$ y se obtiene una cota para $u(t)$.

Los últimos tres ejercicios salen a partir del teorema de continuación "abstracto" que vimos para la ecuación (o el sistema) $u''(t) + g(u(t)) = p(t)$ con condiciones periódicas para p de promedio 0. Por ejemplo, alcanza con encontrar un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y un $r > 0$ tales que:

(a) La ecuación $u'' = \lambda(p - g(u))$ con $\lambda \in (0, 1)$ no tiene soluciones en el borde del conjunto $\{u \in C([0, T]) : \|u\|_\infty < r, \overline{u} \in \Omega\}$.

(b) $g(u) \neq 0$ para $u \in \partial\Omega$.

(c) $deg(g, \Omega, 0) \neq 0$.

En todos los casos que aparecen en estos ejercicios, se obtiene directamente una cota a priori para $\|u'\|_\infty$, lo que permite fijar r. En el ejercicio 6 se encuentra fácilmente $\Omega \subset \mathbb{R}$ a partir de la igualdad $\int_0^1 g(u(t))\,dt = 0$ y el hecho de que $\|u - \overline{u}\|_\infty < r$. En el ejercicio 7, se puede suponer que existe una sucesión u_n tal que $u_n'' = \lambda_n(p - g(u_n))$ para ciertos $\lambda_n \in (0, 1)$ y $\|u_n\|_\infty \to \infty$. En ese caso, $\overline{u_n} \to \infty$. Tomando una subsucesión convergente de $\frac{\overline{u_n}}{|\overline{u_n}|}$ y usando convergencia mayorada a partir de la igualdad $\int_0^1 g(u_n(t))\,dt = 0$ se llega a un absurdo. En el ejercicio 8, las cotas se obtienen de la misma forma que se vio en la práctica 1.