Una prueba elemental del teorema de Lazer-Leach

Consideremos el problema de encontrar soluciones 2π-periodicas de la ecuación

$$u''(t) + m^2 u(t) + g(u(t)) = p(t) \tag{1}$$

con $m \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada con límites en infinito:

$$g(\pm\infty) := \lim_{u \to \pm\infty} g(u)$$

y $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función 2π-periódica. El teorema de Lazer-Leach da una condición necesaria (que es también suficiente en el caso de que $g(u)$ se encuentre estrictamente entre $g(-\infty)$ y $g(+\infty)$ para todo u) en términos de los m-ésimos coeficientes de Fourier de p. Más concretamente, si definimos

$$A_m := \int_0^{2\pi} p(t)\cos(mt)\,dt \qquad B_m := \int_0^{2\pi} p(t)\sin(mt)\,dt,$$

se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 0.1 *Supongamos que*

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2} < 2|g(+\infty) - g(-\infty)|.$$

Entonces la ecuación (1) tiene al menos una solución 2π-periódica

En otras palabras, el teorema nos dice que si los límites de g en $\pm\infty$ son distintos y la proyección de p al subespacio de $L^2(0, 2\pi)$ generado por las funciones $\sin(mt)$ y $\cos(mt)$ es suficientemente chica, entonces el problema tiene solución. Vale la pena observar que dicho subespacio es precisamente el núcleo del operador lineal $Lu := u'' + m^2 u$: en tal sentido, el resultado es similar al teorema de Landesman-Lazer para $m = 0$, que establece la existencia de soluciones del problema $u'' + g(u) = p$ cuando el promedio de p se encuentra entre los límites $g(\pm\infty)$, es decir:

$$g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty)$$

o

$$g(+\infty) < \overline{p} < g(-\infty).$$

Vale la pena notar que en este caso el núcleo del operador es el conjunto de constantes, y precisamente $\overline{p}$ es la proyección a dicho núcleo. La idea de que la proyección sea "chica" se puede interpretar en este contexto suponiendo que $g(-\infty) = -g(+\infty)$ (esto siempre se puede hacer, sumando una constante apropiada de los dos lados de la ecuación).

Vamos a demostrar el teorema para $m = 1$; el caso general es análogo y queda como ejercicio. Supongamos en primer lugar que g es localmente Lipschitz y planteemos el problema de valores iniciales en coordenadas polares

$$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t)$$

$$u(0) = r\cos\theta, \quad u'(0) = r\sin\theta.$$

Empleando el método de variación de parámetros para la ecuación $u'' + u = \varphi$, se obtiene que

$$u(t) = \left(u(0) - \int_0^t \varphi(s)\sin s\,ds\right)\cos t + \left(u'(0) + \int_0^t \varphi(s)\cos s\,ds\right)\sin t,$$

de modo que para $u = u_{r,\theta}$ vale

$$u(t) = r\cos(\theta - t) + \int_0^t [p(s) - g(u(s))]\sin(t - s)\,ds.$$

En consecuencia, si (aprovechando las "bondades" de la notación compleja) consideramos la función

$$F(r,\theta) = (u'(2\pi) - u'(0)) + i(u(0) - u(2\pi))$$

resulta:

$$F(r,\theta) = \int_0^{2\pi} [p(s) - g(u(s))]e^{is}\,ds.$$

Usando la anterior fórmula para $u(t)$ y haciendo sustitución, podemos escribir

$$F(r,\theta) = \int_0^{2\pi} [p(s) - g(r\cos(\theta - s) + \xi(s))]e^{is}\,ds$$

$$= \int_0^{2\pi} p(t)e^{it}\,dt - e^{i\theta}\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi(t))e^{it}\,dt$$

en donde $|\xi(t)| \leq \|p\|_\infty + \|g\|_\infty$ para todo t. Calculemos ahora el límite cuando $r \to +\infty$ de la integral $\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi(t))e^{it}\,dt$. Por periodicidad, podemos pensarla como la suma de dos integrales, una en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y otra en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$: de esta forma, usando convergencia mayorada se ve que

$$\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi(t))e^{it}\,dt \to \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(+\infty)e^{it}\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(-\infty)e^{it}\,dt$$

$$= -2[g(+\infty) - g(-\infty)]$$

uniformemente en θ. En consecuencia,

$$F(r,\theta) \to A_1 + iB_1 + 2e^{i\theta}[(g(+\infty) - g(-\infty)]$$

uniformemente en θ. Mirando ahora a F como función de $(x, y) = (rcos\theta, r\sin\theta)$, la hipótesis implica que el campo apunta hacia afuera en $\partial B_r(0,0)$ cuando r es grande y entonces F se anula en $B_r(0,0)$. El caso general sale por aproximación: basta observar que si u es una solución entonces la cuenta anterior da una cota r para $\|u\|_\infty$ que depende solo de $\|g\|_\infty$ y $\|p\|_\infty$; luego, podemos tomar $R > r$ suficientemente grande y una sucesión de funciones Lipschitz $g_n \to g$ uniformemente en $[-R, R]$ tales que extendidas a todo $\mathbb{R}$ cumplan la hipótesis de Lazer-Leach. El resultado se deduce usando Arzelá-Ascoli.