Grado de Brouwer: aplicaciones

1 Teorema de Brouwer

1. $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continua tiene un punto fijo.

   Demostración: Sea $h(x, \lambda) = x - \lambda f(x)$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $h(x, \lambda) = 0$ para $x \in \partial B$, entonces $x = \lambda f(x)$ y $1 = |x| = \lambda |f(x)| \leq \lambda$. Luego $\lambda = 1$ y $f(x) = x$. En otras palabras, f tiene un punto fijo en ∂B o, en caso contrario, h no se anula para $x \in \partial B$ y entonces $deg(f, B, 0) = deg(Id, B, 0) = 1$.

   □

2. Si $\phi : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $\phi(x) \cdot x > 0$ para $x \in \partial B$ entonces $deg(\phi, B, 0) = 1$. En particular,

   - ϕ se anula en B.
   - No hay retracciones de $\overline{B}$ en ∂B.

   Demostración: Basta definir la homotopía $h(x, \lambda) = \lambda \phi(x) + (1 - \lambda)x$. Si $x \in \partial B$, vale $h(x, \lambda) \cdot x > 0$, y en particular $h(x, \lambda) \neq 0$.

   □

3. Si $F : [-1, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que

   $$F_j(-x) < 0 < F_j(x)$$

   para todo $x \in [-1, 1]^n$ tal que $x_j = 1$, entonces F se anula en $(-1, 1)^n$.

   Demostración: Sea $h(x, \lambda) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)x$. Si $F(x) = 0$ para $x \in \partial B$, podemos suponer por ejemplo que $x_j = 1$ y entonces $F_j(x) > 0$, lo que es absurdo. □

2 Teorema de la bola peluda

1. Sea $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ continua con n impar. Entonces existen $r \in \mathbb{R}$ y $x \in \partial B$ tales que $f(x) = rx$.

   Demostración: Si f se anula en ∂B el resultado vale tomando $r = 0$. Si $f(x) \neq rx$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \partial B$, definimos las homotopías

   $$h_\pm(x, \lambda) = \lambda f(x) \pm (1 - \lambda)x.$$

Si $h_{\pm}(x,\lambda)=0$ para $\lambda\in[0,1]$ y $x\in\partial B$, entonces $\lambda>0$ y $f(x)=\pm\frac{\lambda-1}{\lambda}x$, lo que es absurdo. Se deduce que

$$deg(f,B,0)=deg(\pm Id,B,0)=(\pm 1)^n$$

y como n es impar se llega nuevamente a un absurdo.

□

2. *Consecuencia*: Si n es impar, no existen campos tangentes continuos sobre la esfera que no se anulen en ningun punto.

   Demostración: Si $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ es continua tal que $f(x)\cdot x=0$ para todo x, extendiéndola en forma continua a $\overline{B}$ se deduce que $f(x)=rx$ para algún r y luego $0=f(x)\cdot x=r$. □

3 Teorema de Borsuk

Sea Ω un abierto acotado simétrico respecto de 0 tal que $0\in\Omega$. Si $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ es continua e impar con $0\notin f(\partial\Omega)$ entonces $deg(f,\Omega,0)$ es impar.

Demostración: Dado $\varepsilon>0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(0)}\subset\Omega$, definimos $V=\Omega\backslash\overline{B_\varepsilon(0)}$ y $\varphi:\partial V\to\mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\partial\Omega\\ x & |x|=\varepsilon.\end{cases}$$

Por la variante del teorema de Tietze que se demuestra más abajo (Lema 3.2), podemos suponer que φ es una función impar continua definida en $\overline{V}$ tal que $\varphi(x)\neq 0$ si $x_n=0$. Definimos ahora $V^{\pm}=\{x\in V:\pm x_n>0\}$, entonces

$$deg(\varphi,V,0)=deg(\varphi,V^+,0)+deg(\varphi,V^-,0)$$

y como φ es impar se deduce que $deg(\varphi,V^+,0)=deg(\varphi,V^-,0)$: por ejemplo, alcanza con aproximar φ en $\overline{V^+}$ por una función ψ de clase C^1 y tomar z valor regular de ψ suficientemente pequeño, entonces $\psi^-(x):=-\psi(-x)$ es una aproximación de φ en $\overline{V^-}$ y tiene a $-z$ como valor regular. Luego

$$deg(\varphi,V^-,0)=deg(\psi^-,V^-,-z)=\sum_{\psi^-(x)=-z} sgn(Jac\psi^-(x))$$

$$=\sum_{\psi(x)=z} sgn(Jac\psi(x))=deg(\psi,V^+,z)=deg(\varphi,V^+,0).$$

Extendiendo a φ como la identidad dentro de $B_\varepsilon(0)$, resulta

$$deg(f,\Omega,0)=deg(\varphi,\Omega,0)=deg(\varphi,B_\varepsilon(0),0)+deg(\varphi,V,0)=1+2deg(\varphi,V^+,0).$$

□

Otra demostración: En primer lugar, observemos que se puede suponer que f es de clase C^1 y $Jacf(0) \neq 0$. En efecto, basta fijar $\varepsilon > 0$ tal que $deg(g, \Omega, 0) = deg(f, \Omega, 0)$ para toda g tal que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$ y luego considerar $g(x) = h(x) + \frac{\varepsilon x}{2r}$ con r el radio de Ω y h impar de clase C^1 tal que $\|h - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ y $h \equiv 0$ en un entorno de 0 (recordar que $f(0) = 0$). Si 0 es valor regular de f el resultado es claro porque

$$deg(f, \Omega, 0) = sgn(Jacf(0)) + \sum_{x \in f^{-1}(0) \setminus \{0\}} sgn(Jacf(x)),$$

en donde la suma tiene un número par de sumandos. En caso contrario, podemos "regularizar" al 0 de la siguiente manera: sea $\Omega_1 := \{x \in \Omega : x_1 \neq 0\}$ y consideremos y^1 un valor regular de la función $g(x) := \frac{f(x)}{x_1^3}$ en Ω_1. Definimos entonces $f^1(x) := f(x) - x_1^3 y^1$. Tomando $|y^1|$ suficientemente pequeño vale $deg(f^1, \Omega, 0) = deg(f, \Omega, 0)$; por otra parte, si $x \in \Omega_1$ es un cero de f^1 entonces $g(x) = y^1$ y $Df^1(x) = x_1^3 Dg(x)$, de donde se deduce que 0 es valor regular de f^1 en Ω_1. Inductivamente, tomamos y^{k+1} valor regular de $\frac{f^k}{x_{k+1}^3}$ suficientemente cercano al 0 y definimos $f^{k+1}(x) = f^k(x) - x_{k+1}^3 y^{k+1}$. De esta forma, $deg(f, \Omega, 0) = deg(f^n, \Omega, 0)$. Afirmamos que 0 es valor regular de f^n en Ω. En efecto, si $f^n(x) = 0$, sabemos ya que $Df(x)$ es inversible cuando $x \in \Omega_n$. Si $x \notin \Omega_n$, entonces $x_n = 0$ y $f^n(x) = f^{n-1}(x)$, $Df^n(x) = Df^{n-1}(x)$. Repitiendo el procedimiento, si $x \neq 0$ deducimos que $f^n(x) = f^j(x)$, $Df^n(x) = Df^j(x)$ en donde x_j es la última coordenada no nula de x. Como $x \in \Omega_j$, resulta $Df^j(x)$ inversible. Finalmente, $Df^n(0) = Df(0)$, que es inversible.

□

Corolario 3.1 *(Borsuk-Ulam) Si $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces existe x tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración: Sea $\varphi(x) := f(x) - f(-x)$. Si φ no se anula, podemos extenderla a una función impar continua definida en $\overline{B}$, la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^{n+1}$. Identificando $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, el teorema de Borsuk dice que $deg(\varphi, B, 0)$ es impar. Por otra parte, si $y = (0, \ldots, 0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces $y \notin \varphi(B)$ y resulta

$$deg(\varphi, B, 0) = deg(\varphi, B, y) = 0$$

lo que es absurdo. □

Lema 3.2 *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado simétrico respecto al 0 tal que $0 \notin \overline{V}$ y $\varphi : \partial V \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ continua e impar. Dado un hiperplano H que pasa por el origen, existe una extensión $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ continua e impar de φ tal que $\psi(x) \neq 0$ para $x \in \overline{V} \cap H$.*

La demostración queda como ejercicio. A modo de "sugerencia", se puede aplicar el siguiente resultado: si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $\varphi : K \to \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$

es continua, con $m > n$, entonces para cualquier $C \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a K existe una extensión continua $\psi : C \to \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Para ver esto, se puede suponer directamente que C es por ejemplo una bola cerrada centrada en 0. Si $r = \min_{x \in K} |\varphi(x)|$, tomamos $g : C \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 tal que $|g(x) - \varphi(x)| < \frac{r}{4}$ para $x \in K$. Por el lema de Sard, existe $z \notin Im(g)$ tal que $|z| < \frac{r}{4}$. Dada

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{2t}{r} & t \leq \frac{r}{2} \\ 1 & t > \frac{r}{2} \end{cases}$$

definimos $\phi(x) = \frac{g(x)-z}{\sigma(g(x)-z)}$.

Claramente $\phi(x) \geq \frac{r}{2}$; además, si $x \in K$ entonces $|g(x) - z| \geq |\varphi(x)| - |g(x) - \varphi(x)| - |z| > \frac{r}{2}$. Por el teorema de Tietze, existe $T : C \to \mathbb{R}^m$ que extiende a la función $\phi - \varphi$ tal que $|T(x)| < \max_{y \in K} |\phi(y) - \varphi(y)| < \frac{r}{2}$ para todo $x \in C$. Luego, $\psi : C \to \mathbb{R}^m$ dada por $\psi(x) := \phi(x) - T(x)$ es continua y satisface: $|\psi(x)| \geq |\phi(x)| - |T(x)| \geq \frac{r}{2} - |T(x)| > 0$ para todo $x \in C$. Además, es claro que ψ extiende a φ.

4 Invariancia del dominio

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ localmente inyectiva. Entonces f es abierta. En particular, si $V \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto homeomorfo a U, entonces $m = n$.

Demostración: Alcanza con probar que si $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva con $f(0) = 0$ entonces su imagen contiene un entorno de 0. Consideremos $h : \overline{B_r(0)} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(x, \lambda) = f\left(\frac{x}{1+\lambda}\right) - f\left(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}\right).$$

Se cumple que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$, que es impar. Además, si $h(x, \lambda) = 0$ entonces $f\left(\frac{x}{1+\lambda}\right) = f\left(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}\right)$ y luego $x = 0 \notin \partial B_r(0)$. Esto prueba que $deg(f, B_r(0), 0)$ es impar; en particular, $deg(f, B_r(0), p) \neq 0$ para todo p en un entorno de 0.

Si ahora tenemos un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ y por ejemplo $n > m$, entonces pensando a $\mathbb{R}^m$ como $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ resulta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ abierta, lo que es absurdo.

□

Una aplicación inmediata es la siguiente: si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, localmente inyectiva y $|f|$ es *coerciva*, es decir $|f(x)| \to \infty$ para $|x| \to \infty$, entonces f es suryectiva. En efecto, por el resultado anterior sabemos que la imagen de f es un conjunto abierto y, por otra parte, , si $f(x_n) \to y$ entonces $\{x_n\}$ está acotada. Luego existe x_{n_j} convergente a cierto x y vale $f(x) = y$. Esto prueba que $Im(f)$ es cerrada y en consecuencia $Im(f) = \mathbb{R}^n$.

5 Un ejemplo elemental: ecuaciones en diferencias

Supongamos que queremos resolver la siguiente ecuación de segundo orden:

$$\begin{cases} \Delta^2 y(t) = f(t, y(t)) & t = 0, \ldots, n-2 \\ y(0) = y(n) = 0, \end{cases}$$

donde Δ es el operador en diferencias, definido por $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ y $f : \{0, \ldots, n-2\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua (es decir, $f(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua para $t = 0, \ldots, n-2$). Identificando a las funciones $z : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos plantear el problema previo como una ecuación de punto fijo en $\mathbb{R}^{n+1}$: para z fijo, resolvemos el problema

$$\begin{cases} \Delta^2 y(t) = f(t, z(t)) & t = 0, \ldots, n-2 \\ y(0) = y(n) = 0, \end{cases}$$

lo que define una función $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Queda como ejercicio verificar que T está bien definida y es continua.

Para probar que T tiene un punto fijo, alcanza con encontrar un cero de la función $F(z) := z - T(z)$. Una manera de probar que F tiene un cero consiste en probar que su grado respecto del 0 es no nulo en algún abierto apropiado; como el grado en general es difícil de calcular, se puede definir una homotopía $h(z, \lambda) = z - T_\lambda(z)$, donde T_λ se define como antes pero agregando λ a la ecuación, vale decir: $T_\lambda(z) = y$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} \Delta^2 y(t) = \lambda f(t, z(t)) & t = 0, \ldots, n-2 \\ y(0) = y(n) = 0. \end{cases}$$

Nuevamente, es fácil ver que h está bien definida y es continua; además, $h(\cdot, 0)$ es la identidad, cuyo grado sabemos calcular. A modo de conclusión, podemos decir que si existe algún Ω abierto acotado que contiene al 0 tal que $z \neq T_\lambda(z)$ para $z \in \partial\Omega$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces la existencia al menos una solución en Ω está garantizada pues en tal caso $deg(F, \Omega, 0) = deg(Id, \Omega, 0) = 1$.

Ejercicio: Verificar que si f es creciente o sublineal en su segunda coordenada entonces el problema tiene al menos una solución en $\Omega = B_R(0)$ con R suficientemente grande.