Grado de Brouwer

Como vimos, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 tal que $f(x) \neq p$ para $x \in \partial\Omega$ y p valor regular de f, entonces su grado de Brouwer se define como

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn(Jf(x)),$$

en donde Jf denota el determinante jacobiano de f. Más precisamente, vimos que esta es la única definición posible si se pretende que el grado, pensado como función definida sobre las ternas (f, Ω, p) con $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $p \notin f(\partial\Omega)$, cumpla los siguientes axiomas:

1. $deg(Id, \Omega, p) = \chi_\Omega(p)$.
2. $deg(f, \Omega, p) = deg(f - p, \Omega, 0)$.
3. Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son abiertos disjuntos y $f \neq p$ en $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p)$.
4. Si $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es continua y $h(x, \lambda) \neq p$ para $x \in \partial\Omega$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces $deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, p)$ es constante.

Veremos ahora que existe una única manera de extender la anterior definición a funciones continuas cualesquiera y que los axiomas efectivamente se verifican.

Una primera observación evidente es que si $p \notin f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f entonces su grado se puede calcular mediante una integral: en efecto, dada una función continua $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuyo soporte está contenido en $B_\varepsilon(0)$ para ε suficientemente pequeño y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx = 1$, vale

$$deg(f, \Omega, p) = \int_\Omega \Phi(f(x) - p) Jf(x)\, dx. \tag{1}$$

Este hecho se debe al teorema de cambio de variables: si consideramos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y entornos disjuntos V_x de cada preimagen x de p tales que $f|_{V_x} : V_x \to B_\varepsilon(p)$ es un difeomorfismo, entonces

$$\int_\Omega \Phi(f(y) - p) Jf(y)\, dy = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \int_{V_x} \Phi(f(y) - p) Jf(y)\, dy$$

$$= \sum_{x\in f^{-1}(p)} sgn(Jf(x)) \int_{V_x} \Phi(f(y)-p)|Jf(y)|\, dy$$

$$= \sum_{x\in f^{-1}(p)} sgn(Jf(x)) \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(w)\, dw = deg(f,\Omega,p).$$

El siguiente objetivo consiste en definir el grado por medio de la fórmula (1) para cualquier función f suave tal que $p \notin f(\partial\Omega)$; es decir, sin pedir que p sea valor regular. Más concretamente, vamos a considerar Φ radial que también se anula en un entorno de 0. Dada $\Phi(x) := \phi(|x|)$, con $\phi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $sop(\phi) \subset (0,\varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)\, dx = 1$, veremos que si $\varepsilon \le dist(p, f(\partial\Omega))$ entonces la integral $\int_\Omega \phi(|f(x)-p|)Jf(x)\, dx$ no depende de la elección de ϕ. En particular, se deduce que si p es un valor regular de f entonces la integral coincide con $deg(f,\Omega,p)$.

Para demostrarlo, observemos que por Stone-Weierstrass podemos suponer que f es de clase C^2. Como $\phi(|f(x)-p|) = 0$ para x en un entorno de $\partial\Omega$, también se puede suponer que $\partial\Omega$ es suave. Finalmente, basta considerar el caso $p = 0$.

Si ϕ_1, ϕ_2 son continuas con soporte en $(0,\varepsilon)$ tales que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(|x|)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_2(|x|)\, dx = 1$, definimos $\xi(s) = \phi_1(s) - \phi_2(s)$ y

$$\psi(s) := \frac{1}{s^n} \int_{B_s(0)} \xi(|x|)\, dx.$$

Es claro que ψ es de clase C^1 y $sop(\psi) \subset (0,\varepsilon)$; además,

$$s\psi'(s) = -n\psi(s) + s^{1-n}\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{B_s(0)} \xi(|x|)\, dx\right)$$

$$= -n\psi(s) + s^{1-n}\frac{\partial}{\partial s}\left(\omega_n \int_0^s \rho^{n-1}\xi(\rho)\, d\rho\right) = -n\psi(s) + \omega_n\xi(s),$$

donde ω_n es la superficie de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Por otra parte, definimos

$$V_j(x) := \psi(|f(x)|) det A_j(x)$$

donde A_j es la matriz jacobiana de f con la columna j-ésima reemplazada por $f(x)$. El campo $V = (V_1, \ldots, V_n)$ es de clase C^1 (pues $\psi \equiv 0$ en un entorno de 0) y se anula en un entorno de $\partial\Omega$. Por comodidad, llamaremos M^{ij} a la matriz jacobiana de f reemplazando por un 1 el elemento ij y por un 0 los restantes elementos de la fila i y la columna j. Entonces

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}[\psi(|f(x)|)] det A_j(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|}\sum_{k=1}^n f_k(x)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\right) det A_j(x)$$

$$= \frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|}\sum_{j,k=1}^n f_k(x)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} f_i(x) det(M^{ij}(x)).$$

Reordenando los términos y observando que

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)det(M^{ij}(x)) = \begin{cases} Jf(x) & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

resulta

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial[\psi(|f(x)|)]}{\partial x_j}detA_j = \frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)^2 Jf(x) = Jf(x)|f(x)|\psi'(|f(x)|).$$

Por otra parte, mirando al determinante como una función de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en $\mathbb{R}$ y desarrollándolo por fila r o por columna s, es claro que $\frac{\partial det}{\partial a_{rs}}(A) = (-1)^{r+s}detA^{rs}$, de donde

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[detM^{ij}(x)] = \sum_{r,s=1}^{n}(-1)^{r+s}det([M^{ij}]^{rs})\frac{\partial[M^{ij}]_{rs}}{\partial x_j}.$$

Claramente, $\frac{\partial[M^{ij}]_{rs}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f^r}{\partial x_j \partial x_s}$ para $r \neq i, s \neq j$ y 0 en los casos restantes, de modo que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}[detM^{ij}(x)] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r\neq i, s\neq j}(-1)^{r+s}det([M^{ij}]^{rs})\frac{\partial^2 f^r}{\partial x_j \partial x_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\sum_{r\neq i, j\neq s}(-1)^{r+s}det([M^{ij}]^{rs})\frac{\partial^2 f^r}{\partial x_s \partial x_j}.$$

Notemos también que para $s \neq j$ resulta $det([M^{ij}]^{rs}) = -det([M^{is}]^{rj})$, y se deduce que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}[detM^{ij}(x)] = -\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}[detM^{is}(x)].$$

En consecuencia, $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}[detM^{ij}(x)] = 0$ y luego

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(x)detM^{ij}(x)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)detM^{ij}(x) = nJf(x).$$

En definitiva, se obtiene:

$$divV(x) = Jf(x)\left[|f(x)|\psi'(|f(x)|) + n\psi(|f(x)|)\right]$$

$$= \omega_n \xi(|f(x)|)Jf(x);$$

de esta forma,

$$\int_\Omega \xi(|f(x)|)Jf(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int divV(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}V(x)\cdot\nu(x)dS = 0,$$

lo que prueba que $\int_\Omega \phi_1(|f(x)|)Jf(x)\,dx = \int_\Omega \phi_2(|f(x)|)Jf(x)\,dx$. $\square$

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que permitirá la extensión de la definición de grado primero a funciones suaves cualesquiera y finalmente a funciones continuas.

Lema 0.1 *Sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y supongamos que p es un valor regular tal que $r := dist(p, f(\partial\Omega)) > 0$. Sea $\varepsilon := \frac{r}{7}$. Si $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ verifica que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ y p es valor regular de g, entonces $deg(g, \Omega, p) = deg(f, \Omega, p)$.*

Demostración: Como antes, podemos suponer $p = 0$. Sea $\eta : [0, +\infty) \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que $\eta \equiv 1$ en $[0, 2\varepsilon]$ y $\eta \equiv 0$ en $[3\varepsilon, +\infty)$. Entonces la función

$$h(x) := (1 - \eta(|f(x)|)f(x) + \eta(|f(x)|)g(x)$$

es de clase C^1 y vale

$$h(x) = f(x) \qquad \text{si } |f(x)| < 2\varepsilon, \qquad h(x) = g(x) \qquad \text{si } |f(x)| > 3\varepsilon.$$

Además, se verifica:

$$\|h - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \|h - g\|_\infty < \varepsilon$$

y

$$|g(x)| > dist(0, f(\partial\Omega)) - \varepsilon, \qquad |h(x)| > dist(0, f(\partial\Omega)) - \varepsilon.$$

Consideremos ahora $\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ cuyo soporte está contenido en $(0, \varepsilon)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)\,dx = 1$ y sea $\tilde{\phi}(s) = \phi(s - 4)$. Como

$$sop(\phi), sop(\tilde{\phi}) \subset (0, 5\varepsilon), \quad 5\varepsilon < dist(0, h(\partial\Omega))$$

resulta

$$\int_\Omega \phi(|h(x)|)Jh(x)\,dx = \int_\Omega \tilde{\phi}(|h(x)|)Jh(x)\,dx.$$

Por otro lado, $\phi(y) = 0$ para $|y| \geq \varepsilon$, y para $|h(x)| < \varepsilon$ vale $|f(x)| < 2\varepsilon$, de donde

$$\phi(|h(x)|)Jh(x) = \phi(|f(x)|)Jf(x)$$

para todo x. Del mismo modo, $\tilde{\phi}(y) = 0$ para $|y| \leq 4\varepsilon$, y si $|h(x)| > 4\varepsilon$ entonces $|f(x)| > 3\varepsilon$ y en consecuencia

$$\tilde{\phi}(|h(x)|)Jh(x) = \tilde{\phi}(|g(x)|)Jg(x)$$

para todo x. Esto prueba que

$$\int_\Omega \phi(|f(x)|)Jf(x)\,dx = \int_\Omega \tilde{\phi}(|g(x)|)Jg(x)\,dx.$$

$\square$

Empleando el lema de Sard, lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 0.1 *Sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $p \notin f(\partial\Omega)$. Se define*

$$deg(f, \Omega, p) := \lim_{q \to p, q \in VR} deg(f, \Omega, q).$$

La buena definición se prueba considerando por ejemplo $\varepsilon < \frac{1}{15} dist(p, f(\partial\Omega))$. Si q_1 y q_2 son valores regulares de f tales que $|q_j - p| < \varepsilon$ para $j = 1, 2$, entonces definimos $g_j := f - q_j + p$, que tienen a p como valor regular y además $\|g_j - f\|_\infty < \varepsilon$, $dist(p, g_j(\partial\Omega)) \geq dist(p, f(\partial\Omega)) - \varepsilon > 14\varepsilon$. Como $\|g_1 - g_2\|_\infty < 2\varepsilon$, el lema previo dice que $deg(g_1, \Omega, p) = deg(g_2, \Omega, p)$.

Como último paso, observemos que si f es continua y $p \notin f(\partial\Omega)$, entonces $p \notin g(\partial\Omega)$ para cualquier g suficientemente cerca de f para la norma infinito.

Definición 0.2 *Sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $p \notin f(\partial\Omega)$. Se define*

$$deg(f, \Omega, p) := \lim_{\|g-f\|_\infty \to 0, g \in C^1} deg(g, \Omega, p).$$

Además del teorema de Stone-Weierstrass, la buena definición surge nuevamente del hecho de que si dos funciones de clase C^1 están a distancia pequeña para la norma infinito y p no está en la imagen del borde, entonces tienen el mismo grado. Una manera elegante de mostrarlo consiste en definir el conjunto

$$\mathcal{C}_p := \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : p \notin f(\partial\Omega)\}$$

y observar que la función $deg(\cdot, \Omega, p)$ es localmente constante en $\mathcal{C}_p \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Es fácil verificar que las componentes conexas de este último conjunto coinciden con las componentes conexas de $\mathcal{C}_p$ intersecadas con $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, de modo que hay una única extensión del grado a $\mathcal{C}_p$, que es precisamente la que se da en la anterior definición.

Para concluir, veamos que los axiomas se verifican. El primero de ellos es evidente, porque p es un valor regular de la función identidad. Los tres axiomas restantes se deducen del hecho de que el grado es constante en las componentes conexas de $\mathcal{C}_p$. En efecto, 2 y 3 son evidentes cuando f es C^1 y p es valor regular; en consecuencia, valen para toda f porque (usando Sard y Stone-Weierstrass) cada una de las componentes conexas de $\mathcal{C}_p$ contiene una función suave tal que p es valor regular. Finalmente, la invariancia por homotopía se prueba a partir de la observación de que la curva $\varphi : [0, 1] \to \mathcal{C}_p$ dada por $\varphi(\lambda) := h(\cdot, \lambda)$ es continua y por consiguiente todas las funciones $h(\cdot, \lambda)$ pertenecen a la misma componente conexa. Más aun, es fácil verificar que también se puede mover en forma continua el punto p:

Ejercicio 0.1

Si $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ y $p : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ son continuas con $h(x, \lambda) \neq p(\lambda)$ para $x \in \partial\Omega$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces $deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, p(\lambda))$ es constante.