Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul

Lorena Stockdale Carla Baroncini Erika Porten

Profesor: Pablo Amster

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

27 de noviembre de 2012

Muchos problemas del análisis no lineal se pueden escribir de la siguiente forma:

$$Lu = Nu$$

donde L es un operador diferencial lineal y N es un operador no lineal que suele involucrar derivadas de menor orden.

Muchos problemas del análisis no lineal se pueden escribir de la siguiente forma:

$$Lu = Nu$$

donde L es un operador diferencial lineal y N es un operador no lineal que suele involucrar derivadas de menor orden.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $f : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, acotada y Caratheodory. Consideramos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Muchos problemas del análisis no lineal se pueden escribir de la siguiente forma:

$$Lu = Nu$$

donde L es un operador diferencial lineal y N es un operador no lineal que suele involucrar derivadas de menor orden.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $f : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, acotada y Caratheodory. Consideramos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si L es inversible, el problema se dice **no resonante** y su resolución se reduce a un problema de punto fijo:

Fijado $v \in L^2(\Omega)$, consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(v(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

que tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$ (ya que $u = L^{-1} f(v, x)$).

Fijado $v \in L^2(\Omega)$, consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(v(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

que tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$ (ya que $u = L^{-1} f(v, x)$).

Definimos el operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $Tv = u$.

Fijado $v \in L^2(\Omega)$, consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(v(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

que tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$ (ya que $u = L^{-1} f(v, x)$).

Definimos el operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $Tv = u$.

Notemos que, como f es acotada, resulta:

$$\|Tv\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leq c\,\|Lu\|_{L^2} = c\,\|f(v, x)\|_{L^2} \leq R$$

Fijado $v \in L^2(\Omega)$, consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(v(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

que tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$ (ya que $u = L^{-1} f(v, x)$).

Definimos el operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $Tv = u$.

Notemos que, como f es acotada, resulta:

$$\|Tv\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leq c \, \|Lu\|_{L^2} = c \, \|f(v, x)\|_{L^2} \leq R$$

Por lo tanto $T(\bar{B_R}) \subset \bar{B_R}$. Tenemos que $\bar{B_R}$ es cerrado, acotado y convexo. Además, T es continua con $T(\bar{B_R})$ compacto (pues $H^1(\Omega)$ está compactamente incluído en $L^2(\Omega)$).

Fijado $v \in L^2(\Omega)$, consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(v(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

que tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$ (ya que $u = L^{-1} f(v, x)$).

Definimos el operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $Tv = u$.

Notemos que, como f es acotada, resulta:

$$\|Tv\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leq c\,\|Lu\|_{L^2} = c\,\|f(v, x)\|_{L^2} \leq R$$

Por lo tanto $T(\bar{B_R}) \subset \bar{B_R}$. Tenemos que $\bar{B_R}$ es cerrado, acotado y convexo. Además, T es continua con $T(\bar{B_R})$ compacto (pues $H^1(\Omega)$ está compactamente incluído en $L^2(\Omega)$).

Luego, por el Teorema de Schauder, T tiene al menos un punto fijo y, en consecuencia, el problema original tiene al menos una solución.

Si L es no inversible, el problema se dice **resonante**. Éste es el caso que nos interesará estudiar, es decir, el caso en el que el siguiente problema tiene soluciones no triviales ($dim(KerL) \neq 0$):

$$\begin{cases} (Lu)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si L es no inversible, el problema se dice **resonante**. Éste es el caso que nos interesará estudiar, es decir, el caso en el que el siguiente problema tiene soluciones no triviales ($dim(KerL) \neq 0$):

$$\begin{cases} (Lu)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Notaremos $<,>_0$ y $<,>_1$ respectivamente el producto interno usual en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. Y por B a la forma bilineal simétrica y acotada asociada a L en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Antes de estudiar las condiciones de Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul, presentamos el siguiente Lema:

Antes de estudiar las condiciones de Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul, presentamos el siguiente Lema:

Lema

Sean $n > 0$, $m \geq 0$ y $q \geq 0$ y $F : \mathbb{R}^{n+m+q} \to \mathbb{R}$ de clase C^1.
Supongamos que existen constantes c, r, $c_1 > 0$ tales que:
1) $F(x, y, z) \leq F(0, y^*, 0)$ para $|z| \leq c_1$, $|y|$, $|y^*| \leq c$ y $|x| = r$,
2) $< \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), y > \geq 0$ para $|y| = c$, $|x| \leq r$ y $|z| \leq c_1$ si $m > 0$,
3) $< \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z), z > \leq 0$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| = c_1$ si $q > 0$.
Entonces existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n+m+q}$ tal que $|x_0| \leq r$, $|y_0| \leq c$, $|z_0| \leq c_1$ y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Antes de estudiar las condiciones de Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul, presentamos el siguiente Lema:

Lema

Sean $n > 0$, $m \geq 0$ y $q \geq 0$ y $F : \mathbb{R}^{n+m+q} \to \mathbb{R}$ de clase C^1.
Supongamos que existen constantes c, r, $c_1 > 0$ tales que:
1) $F(x, y, z) \leq F(0, y^*, 0)$ para $|z| \leq c_1$, $|y|$, $|y^*| \leq c$ y $|x| = r$,
2) $< \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), y > \geq 0$ para $|y| = c$, $|x| \leq r$ y $|z| \leq c_1$ si $m > 0$,
3) $< \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z), z > \leq 0$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| = c_1$ si $q > 0$.
Entonces existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n+m+q}$ tal que $|x_0| \leq r$, $|y_0| \leq c$, $|z_0| \leq c_1$ y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Veamos su demostración:

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(x, y, z) = F(x, y, z) + \frac{1}{k}(|y|^2 - |z|^2 - \frac{2c^2}{r^2}|x|^2)$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(x,y,z) = F(x,y,z) + \frac{1}{k}(|y|^2 - |z|^2 - \frac{2c^2}{r^2}|x|^2)$.

Notemos que:

* $\nabla F_k(x,y,z)$ converge uniformemente a $\nabla F(x,y,z)$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| \leq c_1$.

* $\nabla F_k(x_k,y_k,z_k) = 0$ para $|x_k| \leq r$, $|y_k| \leq c$ y $|z_k| \leq c_1$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(x, y, z) = F(x, y, z) + \frac{1}{k}(|y|^2 - |z|^2 - \frac{2c^2}{r^2}|x|^2)$.

Notemos que:

* $\nabla F_k(x, y, z)$ converge uniformemente a $\nabla F(x, y, z)$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| \leq c_1$.

* $\nabla F_k(x_k, y_k, z_k) = 0$ para $|x_k| \leq r$, $|y_k| \leq c$ y $|z_k| \leq c_1$.

Llamemos (x_0, y_0, z_0) al límite de la sucesión $(x_k, y_k, z_k)_k$ (que por lo visto recién es acotada).

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(x,y,z) = F(x,y,z) + \frac{1}{k}(|y|^2 - |z|^2 - \frac{2c^2}{r^2}|x|^2)$.

Notemos que:

* $\nabla F_k(x,y,z)$ converge uniformemente a $\nabla F(x,y,z)$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| \leq c_1$.

* $\nabla F_k(x_k,y_k,z_k) = 0$ para $|x_k| \leq r$, $|y_k| \leq c$ y $|z_k| \leq c_1$.

Llamemos (x_0,y_0,z_0) al límite de la sucesión $(x_k,y_k,z_k)_k$ (que por lo visto recién es acotada). Entonces, $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0$.

Además, 1), 2) y 3) se verifican pero con las desigualdades estrictas.

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k(x,y,z) = F(x,y,z) + \frac{1}{k}(|y|^2 - |z|^2 - \frac{2c^2}{r^2}|x|^2)$.

Notemos que:

* $\nabla F_k(x,y,z)$ converge uniformemente a $\nabla F(x,y,z)$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| \leq c_1$.

* $\nabla F_k(x_k,y_k,z_k) = 0$ para $|x_k| \leq r$, $|y_k| \leq c$ y $|z_k| \leq c_1$.

Llamemos (x_0,y_0,z_0) al límite de la sucesión $(x_k,y_k,z_k)_k$ (que por lo visto recién es acotada). Entonces, $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0$.

Además, 1), 2) y 3) se verifican pero con las desigualdades estrictas.

Podemos suponer entonces que F cumple las tres desigualdades estrictamente. Supongamos además que $F \in C^2$.

Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+m+q} : |x| \leq r, |y| \leq c \text{ y } |z| \leq c_1\}$.

Sea $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{n+m+q}:|x|\leq r, |y|\leq c \text{ y } |z|\leq c_1\}$.

Modificando F fuera de un conjunto abierto que contenga a B, podemos asumir que ∇F es acotada en $\mathbb{R}^{n+m+q}$.

Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+m+q} : |x| \leq r, |y| \leq c \text{ y } |z| \leq c_1\}$.

Modificando F fuera de un conjunto abierto que contenga a B, podemos asumir que ∇F es acotada en $\mathbb{R}^{n+m+q}$.

Sea $\phi(t, x, y, z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m+q})$ la solución de:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, y, z) = \nabla F(\phi(t, x, y, z)) \\ \phi(0, x, y, z) = (x, y, z). \end{cases}$$

Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+m+q} : |x| \leq r, |y| \leq c \text{ y } |z| \leq c_1\}$.

Modificando F fuera de un conjunto abierto que contenga a B, podemos asumir que ∇F es acotada en $\mathbb{R}^{n+m+q}$.

Sea $\phi(t, x, y, z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m+q})$ la solución de:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, y, z) = \nabla F(\phi(t, x, y, z)) \\ \phi(0, x, y, z) = (x, y, z). \end{cases}$$

Supongamos que no vale la afirmación que queremos probar. Entonces, existe $a > 0$ tal que $|\nabla F(x, y, z)| \geq a$ para $(x, y, z) \in B$.

Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+m+q} : |x| \leq r, |y| \leq c \text{ y } |z| \leq c_1\}$.

Modificando F fuera de un conjunto abierto que contenga a B, podemos asumir que ∇F es acotada en $\mathbb{R}^{n+m+q}$.

Sea $\phi(t, x, y, z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m+q})$ la solución de:

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, x, y, z) = \nabla F(\phi(t, x, y, z)) \\ \phi(0, x, y, z) = (x, y, z). \end{array} \right.$$

Supongamos que no vale la afirmación que queremos probar. Entonces, existe $a > 0$ tal que $|\nabla F(x, y, z)| \geq a$ para $(x, y, z) \in B$.

Luego, si $\phi(t, x, y, z) \in B$, tenemos que:

$$\frac{dF}{dt}(\phi(t, x, y, z)) = |\nabla F(\phi(t, x, yz))|^2 \geq a^2$$

Notemos que esto en particular implica que $F(\phi(t, x, y, z))$ es creciente en t.

Por lo tanto, $\phi(t, x, y, z)$ no puede permanecer en B durante más tiempo que $\dfrac{1}{a^2}(\max_B F - \min_B F)$.

Por lo tanto, $\phi(t, x, y, z)$ no puede permanecer en B durante más tiempo que $\dfrac{1}{a^2}(\max_B F - \min_B F)$.

Sea $D = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| \leq c\}$ y $T(y)$ el mayor positivo tal que:

$$\phi(t, 0, y, 0) \in B \ \textit{para}\ 0 \leq t \leq T(y) \ \textit{si}\ y \in D$$

Claramente, $\phi(T(y), 0, y, 0) \in \partial B$.

Por lo tanto, $\phi(t, x, y, z)$ no puede permanecer en B durante más tiempo que $\frac{1}{a^2}(\max_B F - \min_B F)$.

Sea $D = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| \leq c\}$ y $T(y)$ el mayor positivo tal que:

$$\phi(t, 0, y, 0) \in B \textit{ para } 0 \leq t \leq T(y) \textit{ si } y \in D$$

Claramente, $\phi(T(y), 0, y, 0) \in \partial B$.

Si $\phi(T(y), 0, y, 0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $|\bar{x}| = r$, $|\bar{y}| \leq c$ y $|\bar{z}| \leq c_1$, entonces $T(y) > 0$. Luego, como $F(\phi(t, x, y, z))$ es creciente en t, resulta:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(\phi(T(y), 0, y, 0)) > F(\phi(0, 0, y, 0)) = F(0, y, 0)$$

lo cual contradice la desigualdad 1).

Notemos $\phi(t,0,y,0) = (\phi_n(t,y), \phi_m(t,y), \phi_q(t,y))$ con $\phi_k \in \mathbb{R}^k$ para $k = n, m, q$.

Notemos $\phi(t,0,y,0) = (\phi_n(t,y), \phi_m(t,y), \phi_q(t,y))$ con $\phi_k \in \mathbb{R}^k$ para $k = n, m, q$.

Si $q > 0$ y $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $|\bar{x}| \leq r$, $|\bar{y}| \leq c$ y $|\bar{z}| = c_1$, entonces:

$$2 < \frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{z} >= \frac{d}{dt}|\phi_q(t,y)|^2|_{t=T(y)} \geq 0$$

lo cual contradice la desigualdad 3).

Notemos $\phi(t,0,y,0) = (\phi_n(t,y), \phi_m(t,y), \phi_q(t,y))$ con $\phi_k \in \mathbb{R}^k$ para $k = n, m, q$.

Si $q > 0$ y $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ con $|\bar{x}| \leq r$, $|\bar{y}| \leq c$ y $|\bar{z}| = c_1$, entonces:

$$2 < \frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \bar{z} >= \frac{d}{dt}|\phi_q(t,y)|^2|_{t=T(y)} \geq 0$$

lo cual contradice la desigualdad 3).

Si $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ con $|\bar{x}| < r$, $|\bar{y}| = c$ y $|\bar{z}| < c_1$, por la desigualdad 2) tenemos que:

$$\frac{d}{dt}|\phi_m(t,y)|^2|_{t=T(y)} = 2 < \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \bar{y} > 0$$

Luego existe $\delta(y) > 0$ tal que si $0 < s < \delta(y)$ vale que:

$|\phi_m(T(y)+s, y)| > |\phi_m(T(y), y)|$ y $|\phi_m(T(y)-s, y)| < |\phi_m(T(y), y)|$

Luego existe $\delta(y) > 0$ tal que si $0 < s < \delta(y)$ vale que:

$|\phi_m(T(y)+s, y)| > |\phi_m(T(y), y)|$ y $|\phi_m(T(y)-s, y)| < |\phi_m(T(y), y)|$

Por otro lado,

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \phi(T(y), 0, y, 0) = (\phi_n(T(y), y), \phi_m(T(y), y), \phi_q(T(y), y))$

Por lo tanto, $|\phi_m(T(y), y)| = |\bar{y}| = c$.

Luego existe $\delta(y) > 0$ tal que si $0 < s < \delta(y)$ vale que:

$|\phi_m(T(y)+s, y)| > |\phi_m(T(y), y)|$ y $|\phi_m(T(y)-s, y)| < |\phi_m(T(y), y)|$

Por otro lado,

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \phi(T(y), 0, y, 0) = (\phi_n(T(y), y), \phi_m(T(y), y), \phi_q(T(y), y))$

Por lo tanto, $|\phi_m(T(y), y)| = |\bar{y}| = c$.

Notemos que si $|y| < c$, entonces $|\phi_m(t, y)| < c$ para $0 \leq t < T(y)$. Y si $|y| = c$, $T(y) = 0$.

De la continuidad de $\phi(t, 0, y, 0)$ resulta que $T(y)$ es continua sobre la bola cerrada D.

Consideremos $\theta : D \to \partial D$ dada por $\theta(y) = \phi_m(T(y), y)$.

Consideremos $\theta : D \to \partial D$ dada por $\theta(y) = \phi_m(T(y), y)$.

Si $|y| = |\phi_m(T(y), y)|$, $\theta(y) = \phi_m(T(y), y) = \phi_m(0, y) = y$.

Luego, θ es una retracción continua de D en su borde, lo cual es absurdo.

Consideremos $\theta : D \to \partial D$ dada por $\theta(y) = \phi_m(T(y), y)$.

Si $|y| = |\phi_m(T(y), y)|$, $\theta(y) = \phi_m(T(y), y) = \phi_m(0, y) = y$.

Luego, θ es una retracción continua de D en su borde, lo cual es absurdo.

Resta ahora probar el resultado para $F \in C^1$ tal que 1), 2) y 3) se verifican estrictamente.

Consideremos $\theta : D \to \partial D$ dada por $\theta(y) = \phi_m(T(y), y)$.

Si $|y| = |\phi_m(T(y), y)|$, $\theta(y) = \phi_m(T(y), y) = \phi_m(0, y) = y$.

Luego, θ es una retracción continua de D en su borde, lo cual es absurdo.

Resta ahora probar el resultado para $F \in C^1$ tal que 1), 2) y 3) se verifican estrictamente.

Sea $(F_k)_k \subset C^2$ tal que $F_k \to F$ y ∇F_k converge uniformemente a ∇F en B. Luego, existe k_0 tal que F_k satisface 1), 2) y 3) estrictamente para todo $k \geq k_0$.

Por lo demostrado antes, sabemos que existe $(x_k, y_k, z_k) \in B$ tal que $\nabla F_k(x_k, y_k, z_k) = 0$ para todo $k \geq k_0$.

Sea (x_0, y_0, z_0) el límite de $((x_k, y_k, z_k))_k$, entonces resulta $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul (ALP)

Sea $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ una base de soluciones del problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sea $G : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por $G(t,x) = \int_0^t f(s,x)ds$.

Si cuando $s_1^2 + \cdots + s_r^2 \to \infty$, $\int_\Omega G(\sum_{k=1}^r s_k\psi_k(\xi), \xi)d\xi$ tiende a $+\infty$, o bien a $-\infty$, existe solución débil del siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x), x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dos relaciones básicas que utilizaremos en la demostración de este teorema:

$$i) B\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j, \sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j^2$$

$$ii) |\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j|_0^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j^2$$

Dos relaciones básicas que utilizaremos en la demostración de este teorema:

$$i) B\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j, \sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j^2$$

$$ii) \left|\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\right|_0^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j^2$$

Además, precisaremos el hecho de que la aplicación lineal generada por los miembros de la sucesión $(\psi_j)_j$ es densa en $H_1^0(\Omega)$.

Dos relaciones básicas que utilizaremos en la demostración de este teorema:

$$i) B\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j, \sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j^2$$

$$ii) |\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j|_0^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j^2$$

Además, precisaremos el hecho de que la aplicación lineal generada por los miembros de la sucesión $(\psi_j)_j$ es densa en $H_1^0(\Omega)$.

Notaremos $(\lambda_j)_j$ a la sucesión que verifica $T\psi_j = \lambda_j\psi_j$ para todo j.

Dos relaciones básicas que utilizaremos en la demostración de este teorema:

$$i) B\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j, \sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j^2$$

$$ii) \left|\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j\right|_0^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j^2$$

Además, precisaremos el hecho de que la aplicación lineal generada por los miembros de la sucesión $(\psi_j)_j$ es densa en $H_1^0(\Omega)$.

Notaremos $(\lambda_j)_j$ a la sucesión que verifica $T\psi_j = \lambda_j\psi_j$ para todo j.

Por último, tendremos en cuenta la desigualdad de Garding que asegura la existencia de c_0 y c_1 tales que:

$$c_1|u|_1^2 \leq B(u,u) + c_0|u|_0^2 \;\forall\; u \in H_1^0(\Omega)$$

Sea $u \in H_1^0(\Omega)$, consideramos $J(u) = \dfrac{B(u,u)}{2} - \displaystyle\int_\Omega G(u(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$.

Sea $u \in H_1^0(\Omega)$, consideramos $J(u) = \dfrac{B(u,u)}{2} - \int_\Omega G(u(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$.

Sea $q \geq 0$ tal que
$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0 = \lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0 < \lambda_{q+r+1} \leq \ldots$.

Sea $u \in H_1^0(\Omega)$, consideramos $J(u) = \dfrac{B(u,u)}{2} - \displaystyle\int_\Omega G(u(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$.

Sea $q \geq 0$ tal que
$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0 = \lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0 < \lambda_{q+r+1} \leq \ldots$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $F_m : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ dada por
$F_m(x,y,z) = J(u_m(x,y,z))$ donde:

$$u_m(x,y,z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon)$$

Sea $u \in H_1^0(\Omega)$, consideramos $J(u) = \dfrac{B(u,u)}{2} - \displaystyle\int_\Omega G(u(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$.

Sea $q \geq 0$ tal que
$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0 = \lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0 < \lambda_{q+r+1} \leq \ldots$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $F_m : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ dada por $F_m(x,y,z) = J(u_m(x,y,z))$ donde:

$$u_m(x,y,z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon)$$

Por lo tanto resulta:

$$B(u_m, u_m) = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_k^2 \frac{\lambda_{q+r+k}}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2} + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i$$

$$B(u_m, u_m) = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_k^2 \frac{\lambda_{q+r+k}}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2} + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i$$

Como $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$, el primer término se anula. Simplificando el segundo, tenemos que:

$$F_m(x, y, z) = J(u_m(x, y, z)) = \frac{B(u_m, u_m)}{2} - \int_\Omega G(u_m(x, y, z)(\epsilon), \epsilon) d\epsilon =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i - \int_\Omega \int_0^{u_m(x,y,z)} f(s, \epsilon) ds d\epsilon$$

$$B(u_m, u_m) = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_k^2 \frac{\lambda_{q+r+k}}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2} + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i$$

Como $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$, el primer término se anula. Simplificando el segundo, tenemos que:

$$F_m(x, y, z) = J(u_m(x, y, z)) = \frac{B(u_m, u_m)}{2} - \int_\Omega G(u_m(x, y, z)(\epsilon), \epsilon) d\epsilon =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i - \int_\Omega \int_0^{u_m(x,y,z)} f(s, \epsilon) ds d\epsilon$$

Luego,

Para $1 \leq k \leq m$, tenemos que:

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x,y,z) = y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial y_k}d\epsilon =$$

$$= y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}d\epsilon d\epsilon$$

Para $1 \leq k \leq m$, tenemos que:

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x,y,z) = y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial y_k}d\epsilon =$$

$$= y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}d\epsilon d\epsilon$$

Si $q > 0$, para $1 \leq i \leq q$ tenemos que:

$$\frac{\partial F_m}{\partial z_i}(x,y,z) = \lambda_i z_i - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial z_i}d\epsilon =$$

$$= \lambda_i z_i - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\psi_i(\epsilon)d\epsilon$$

Sea $M > 0$ tal que $|f(t,x)| \leq M$ para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$. Aplicando Schwartz,

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon \leq$$

$$\leq M(\int_\Omega (\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}})^2 d\epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Sea $M > 0$ tal que $|f(t,x)| \leq M$ para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$. Aplicando Schwartz,

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) d\epsilon \leq$$

$$\leq M\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}\right)^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por ii), sabemos que:

$$M\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}\right)^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} = M\sqrt{|\Omega|}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $0 < \lambda_{q+r+1} \leq \cdots \leq \lambda_{q+r+k}$ pues $k \geq 1$, podemos acotar este último término del siguiente modo:

$$M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2})^{\frac{1}{2}} \leq M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+1}})^2})^{\frac{1}{2}}$$

Como $0 < \lambda_{q+r+1} \leq \cdots \leq \lambda_{q+r+k}$ pues $k \geq 1$, podemos acotar este último término del siguiente modo:

$$M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2})^{\frac{1}{2}} \leq M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+1}})^2})^{\frac{1}{2}}$$

Además,

$$M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+1}})^2})^{\frac{1}{2}} = M\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}}(\sum_{k=1}^{m} y_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Como $0 < \lambda_{q+r+1} \leq \cdots \leq \lambda_{q+r+k}$ pues $k \geq 1$, podemos acotar este último término del siguiente modo:

$$M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2})^{\frac{1}{2}} \leq M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+1}})^2})^{\frac{1}{2}}$$

Además,

$$M\sqrt{|\Omega|}(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+1}})^2})^{\frac{1}{2}} = M\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}}(\sum_{k=1}^{m} y_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Concluimos entonces que:

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y >= \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) d\epsilon \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - M \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}} (\sum_{k=1}^{m} y_k^2)^{\frac{1}{2}} = |y|^2 - K\sqrt{|y|^2}$$

llamando $K = M \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}}$.

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y >= \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) d\epsilon \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - M \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}} (\sum_{k=1}^{m} y_k^2)^{\frac{1}{2}} = |y|^2 - K\sqrt{|y|^2}$$

llamando $K = M\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{\lambda_{q+r+1}}}$. Por lo tanto:

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0 \ si \ |y| \geq K \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y >\geq 0 \ si \ |y| \geq K \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

Análogamente, si $q > 0$, notando $K^* = -M\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\lambda_q} > 0$ (recordemos que $\lambda_q < 0$), resulta:

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial z}(x,y,z), z >\leq 0 \ si \ |z| \geq K^* \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0 \ si \ |y| \geq K \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

Análogamente, si $q > 0$, notando $K^* = -M\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\lambda_q} > 0$ (recordemos que $\lambda_q < 0$), resulta:

$$< \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial z}(x,y,z), z > \leq 0 \ si \ |z| \geq K^* \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

Veamos ahora que $F_m(x,y,z)$ verifica las condiciones del Lema:

Notemos que, con la misma cuenta que hicimos previamente, podemos obtener la siguiente desigualdad:

$$\int_\Omega G(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}, \epsilon)d\epsilon = \int_\Omega \int_0^{\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}} f(s,\epsilon)dsd\epsilon \leq$$

$$\leq M \int_\Omega (\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}})d\epsilon \leq K|y|$$

Notemos que, con la misma cuenta que hicimos previamente, podemos obtener la siguiente desigualdad:

$$\int_\Omega G(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}, \epsilon) d\epsilon = \int_\Omega \int_0^{\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}} f(s,\epsilon) ds d\epsilon \leq$$

$$\leq M \int_\Omega (\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}) d\epsilon \leq K|y|$$

Luego,

$$F_m(0,y,0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(u_m(0,y,0)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}},\epsilon)d\epsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|y|^2 - K|y| \geq -\frac{K^2}{2}$$

$$F_m(0,y,0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(u_m(0,y,0)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}},\epsilon)d\epsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|y|^2 - K|y| \geq -\frac{K^2}{2}$$

Tenemos entonces que $F_m(0,y,0) \geq -\frac{K^2}{2}\ \forall\ y \in \mathbb{R}^m$.

$$F_m(0,y,0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(u_m(0,y,0)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}},\epsilon)d\epsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|y|^2 - K|y| \geq -\frac{K^2}{2}$$

Tenemos entonces que $F_m(0,y,0) \geq -\frac{K^2}{2}\ \forall\ y \in \mathbb{R}^m$.

Análogamente se puede probar que, si $q > 0$,
$F_m(0,0,z) \leq -\lambda_q \frac{(K^*)^2}{2}\ \forall\ z \in \mathbb{R}^q$.

Como $u_m(x,y,z)(\epsilon) \geq \sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon)$, podemos afirmar que:

$$0 \leq G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon) =$$

$$= \int_0^{u_m(x,y,z)(\epsilon)} f(s,\epsilon)ds - \int_0^{\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon)} f(s,\epsilon)ds =$$

$$= \int_{\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon)}^{u_m(x,y,z)(\epsilon)} f(s,\epsilon)ds \leq M(u_m(x,y,z)(\epsilon) - \sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon))$$

Notemos que, por la definición de u_m, resulta entonces:

$$0 \leq G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon) \leq$$

$$\leq M(u_m(x,y,z)(\epsilon) - \sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon)) = M(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon))$$

Notemos que, por la definición de u_m, resulta entonces:

$$0 \leq G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon) \leq$$

$$\leq M(u_m(x,y,z)(\epsilon) - \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon)) = M(\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon))$$

Por lo tanto:

$$|\int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon| \leq$$

$$\leq M\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)|d\epsilon \leq$$

$$|\int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon| \leq$$

$$\leq M\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)|d\epsilon \leq$$

Aplicando Schwartz,

$$\leq M(\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)|^2 d\epsilon)^{\frac{1}{2}} =$$

$$|\int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon| \leq$$

$$\leq M\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)|d\epsilon \leq$$

Aplicando Schwartz,

$$\leq M(\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k(\epsilon)}}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)|^2 d\epsilon)^{\frac{1}{2}} =$$

Por ii),

$$= M(\int_\Omega (\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{(\sqrt{\lambda_{q+r+k}})^2} + \sum_{i=1}^{q} z_i^2)d\epsilon)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M\left(\int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2\right) d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} = M\left(\int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2\right) d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= M\sqrt{|\Omega|}\left(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq M(\int_\Omega (\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2) d\epsilon)^{\frac{1}{2}} = M(\int_\Omega (\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2) d\epsilon)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2))^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon - M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon), \epsilon) d\epsilon \leq$$

$$\leq \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}} |y|^2 + |z|^2))^{\frac{1}{2}}$$

Luego, como $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$,

$$F_m(x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_i^2 - \int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}|y|^2 + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

Luego, como $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$,

$$F_m(x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_i^2 - \int_\Omega G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}|y|^2 + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

Análogamente, si $q > 0$, podemos probar que vala la siguiente desigualdad:

$$F_m(x,y,z) \geq$$

$$\geq \lambda_1|z|^2 - M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

Reunamos ahora las desigualdad que obtuvimos en este desarrollo:

$$1) < \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0 \ si \ |y| \geq K \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

Si $q > 0$,

$$2) < \frac{\partial F_m(x,y,z)}{\partial z}(x,y,z), z > \leq 0 \ si \ |z| \geq K^* \ \forall \ m \in \mathbb{N}$$

$$3) F_m(0,y,0) \geq -\frac{K^2}{2} \ \forall \ y \in \mathbb{R}^m$$

Si $q > 0$,

$$4) F_m(0,0,z) \leq -\lambda_q \frac{(K^*)^2}{2} \ \forall \ z \in \mathbb{R}^q$$

Recordemos que $F_m(x, y, z) \leq$

$$\leq \frac{1}{2}|y|^2 + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$$

Recordemos que $F_m(x,y,z) \leq$

$$\leq \frac{1}{2}|y|^2 + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

Luego, si $\displaystyle\int_\Omega G(\sum_{k=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$ tiende a $+\infty$ cuando $|x|$ tiende a ∞ (la llamaremos condición (I)), de 3) podemos inferir que existe un $r_1 > 0$ independiente de m tal que:

$$F_m(x,y,z) \leq -\frac{K^2}{2} \leq F_m(0,y^*,0)$$

si $|y|$, $|y|^* \leq K$, $|z| \leq K^*$ y $|x| = r_1$.

Recordemos que $F_m(x, y, z) \leq$

$$\leq \frac{1}{2}|y|^2 + M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$$

Luego, si $\int_\Omega G(\sum_{k=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$ tiende a $+\infty$ cuando $|x|$ tiende a ∞ (la llamaremos condición (I)), de 3) podemos inferir que existe un $r_1 > 0$ independiente de m tal que:

$$F_m(x, y, z) \leq -\frac{K^2}{2} \leq F_m(0, y^*, 0)$$

si $|y|$, $|y|^* \leq K$, $|z| \leq K^*$ y $|x| = r_1$.

Así, $F_m(x, y, z)$ satisface las hipótesis del Lema con $c = K$, $c_1 = K^*$ y $r = r_1$.

Análogamente, recordemos que si $q > 0$, $F_m(x, y, z) \geq$

$$\geq \lambda_1 |z|^2 - M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$$

Análogamente, recordemos que si $q > 0$, $F_m(x,y,z) \geq$

$$\geq \lambda_1 |z|^2 - M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$$

Luego, si $\int_\Omega G(\sum_{k=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$ tiende a $-\infty$ cuando $|x|$ tiende a ∞ (la llamaremos condición (II)), de 4) podemos inferir que existe un $r_2 > 0$ independiente de m tal que:

$$F_m(x,y,z) \geq -\lambda_q \frac{(K^*)^2}{2} \geq F_m(0,0,z^*)$$

si $|z|$, $|z|^* \leq K^*$, $|y| \leq K$ y $|x| = r_2$.

Considerando $E_m(x,y,z) = -F_m(x,y,z)$, resulta que:

$$E_m(x,y,z) \leq E_m(0,0,z^*) \; si \; |z|, |z|^* \leq K^*, \;\; |y| \leq K \;\; y \;\; |x| = r_2$$

Considerando $E_m(x,y,z) = -F_m(x,y,z)$, resulta que:

$$E_m(x,y,z) \leq E_m(0,0,z^*) \; si \; |z|, |z|^* \leq K^*, \; |y| \leq K \; y \; |x| = r_2$$

Como $< \frac{\partial F_m}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0$ si $|y| \geq K$, tenemos:

$$< \frac{\partial E_m}{\partial y}(x,y,z), y > \leq 0 \; si \; |z|, \; |z|^* \leq K^*, \; |y| \leq K \; y \; |x| \leq r_2$$

Considerando $E_m(x,y,z) = -F_m(x,y,z)$, resulta que:

$$E_m(x,y,z) \leq E_m(0,0,z^*) \ si \ |z|, |z|^* \leq K^*, \ \ |y| \leq K \ \ y \ |x| = r_2$$

Como $< \frac{\partial F_m}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0$ si $|y| \geq K$, tenemos:

$$< \frac{\partial E_m}{\partial y}(x,y,z), y > \leq 0 \ si \ |z|, \ |z|^* \leq K^*, \ \ |y| \leq K \ \ y \ |x| \leq r_2$$

Como $< \frac{\partial F_m}{\partial z}(x,y,z), z > \leq 0$ si $|z| \geq K^*$, tenemos:

$$< \frac{\partial E_m}{\partial z}(x,y,z), z > \geq 0 \ si \ |z| = K^*, \ \ |y| \leq K \ \ y \ |x| \leq r_2$$

Considerando $E_m(x,y,z) = -F_m(x,y,z)$, resulta que:

$$E_m(x,y,z) \leq E_m(0,0,z^*) \; si \; |z|, |z|^* \leq K^*, \; |y| \leq K \; y \; |x| = r_2$$

Como $< \frac{\partial F_m}{\partial y}(x,y,z), y > \geq 0$ si $|y| \geq K$, tenemos:

$$< \frac{\partial E_m}{\partial y}(x,y,z), y > \leq 0 \; si \; |z|, \; |z|^* \leq K^*, \; |y| \leq K \; y \; |x| \leq r_2$$

Como $< \frac{\partial F_m}{\partial z}(x,y,z), z > \leq 0$ si $|z| \geq K^*$, tenemos:

$$< \frac{\partial E_m}{\partial z}(x,y,z), z > \geq 0 \; si \; |z| = K^*, \; |y| \leq K \; y \; |x| \leq r_2$$

Luego, $E_m(x,y,z)$ (y por lo tanto $-F_m(x,y,z)$) satisface las hipótesis del Lema con $c = K^*$, $c_1 = K$, $r = r_2$ y los roles de y y z intercambiados.

Si $q = 0$, $F_m(x, y) \geq \text{máx}\{F(0, y^*) : |y^*| \leq K\}$ si $|y| \leq K$ y $r = r_2$. Y vale que:

$$F_m(x, y) \geq -M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon)d\epsilon$$

Si $q = 0$, $F_m(x, y) \geq \text{máx}\{F(0, y^*) : |y^*| \leq K\}$ si $|y| \leq K$ y $r = r_2$. Y vale que:

$$F_m(x, y) \geq -M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon)d\epsilon$$

Luego, análogamente a lo hecho en el caso anterior, resulta que $-F_m(x, y, z)$ satisface las hipótesis del Lema con $r = r_2$, $c_1 = K$ y los roles de y y z intercambiados.

Si $q = 0$, $F_m(x, y) \geq \text{máx}\{F(0, y^*) : |y^*| \leq K\}$ si $|y| \leq K$ y $r = r_2$. Y vale que:

$$F_m(x, y) \geq -M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon) d\epsilon$$

Luego, análogamente a lo hecho en el caso anterior, resulta que $-F_m(x, y, z)$ satisface las hipótesis del Lema con $r = r_2$, $c_1 = K$ y los roles de y y z intercambiados.

Concluimos que en cualquier caso el Lema asegura la existencia de:

$$(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = (x_{1m}, \ldots, x_{rm}, y_{1m}, \ldots, y_{mm}, z_{1m}, \ldots, z_{qm})$$

tal que $|x_0^m| \leq r_1$ (si se cumple la condición (I)) o r_2 (si se cumple la condición (II)), $|y_0^m| \leq K$ y $|z_0^m| \leq K^*$ y $\nabla F_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = 0$.

Si $q = 0$, $F_m(x, y) \geq \text{máx}\{F(0, y^*) : |y^*| \leq K\}$ si $|y| \leq K$ y $r = r_2$. Y vale que:

$$F_m(x, y) \geq -M\sqrt{|\Omega|}(\frac{1}{\lambda_{q+r+1}}|y|^2)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega G(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon), \epsilon)d\epsilon$$

Luego, análogamente a lo hecho en el caso anterior, resulta que $-F_m(x, y, z)$ satisface las hipótesis del Lema con $r = r_2$, $c_1 = K$ y los roles de y y z intercambiados.

Concluimos que en cualquier caso el Lema asegura la existencia de:

$$(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = (x_{1m}, \ldots, x_{rm}, y_{1m}, \ldots, y_{mm}, z_{1m}, \ldots, z_{qm})$$

tal que $|x_0^m| \leq r_1$ (si se cumple la condición (I)) o r_2 (si se cumple la condición (II)), $|y_0^m| \leq K$ y $|z_0^m| \leq K^*$ y $\nabla F_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = 0$.

Llamemos $\bar{r}$ a r_1 o r_2 según cuál de las dos condiciones se verifique.

Sea $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$.

Sea $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$.

Recordemos la definición de $F_m(x, y, z)$ y de $B(u_m, u_m)$:

$$F_m(x, y, z) = \frac{1}{2} B(u_m, u_m) - \int_\Omega \int_0^{u_m(x,y,z)(\epsilon)} f(s, \epsilon) ds d\epsilon$$

$$B(u_m, u_m) = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i$$

Sea $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$.

Recordemos la definición de $F_m(x,y,z)$ y de $B(u_m, u_m)$:

$$F_m(x,y,z) = \frac{1}{2}B(u_m,u_m) - \int_\Omega \int_0^{u_m(x,y,z)(\epsilon)} f(s,\epsilon)dsd\epsilon$$

$$B(u_m,u_m) = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 \lambda_i$$

Luego, para $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k \leq m$ y $1 \leq i \leq q$, obtenemos:

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x_j}(u_m,u_m) - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial x_j}d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}2x_j\lambda_{q+j} - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial y_k}(u_m, u_m) - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon), \epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial y_k}d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}2y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon), \epsilon)\frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}d\epsilon$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial y_k}(u_m, u_m) - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial y_k}d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}2y_k - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}}d\epsilon$$

Si $q > 0$,

$$\frac{\partial F_m}{\partial z_i}(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial z_i}(u_m, u_m) - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\frac{\partial u_m(x,y,z)(\epsilon)}{\partial z_i}d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2}2z_i\lambda_i - \int_\Omega f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)\psi_i(\epsilon)d\epsilon$$

Por otra parte, como $\nabla F_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = 0$,

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = x_j\lambda_{q+j} - \int_\Omega f(u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon$$

Como $x_j\lambda_{q+j} =< \psi_{q+j}, v_m >_0 \lambda_{q+j} = B(v_m, \psi_{q+j})$,

$$= B(v_m, \psi_{q+j}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon = 0$$

Por otra parte, como $\nabla F_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = 0$,

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = x_j \lambda_{q+j} - \int_\Omega f(u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon) d\epsilon$$

Como $x_j \lambda_{q+j} =< \psi_{q+j}, v_m >_0 \lambda_{q+j} = B(v_m, \psi_{q+j})$,

$$= B(v_m, \psi_{q+j}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon) d\epsilon = 0$$

Análogamente,

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = \frac{B(v_m, \psi_{q+r+k})}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon) \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} d\epsilon = 0$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial z_i}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = B(v_m, \psi_i) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_i(\epsilon) d\epsilon = 0$$

Tenemos entonces:

$$B(v_m, \psi_{q+j}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon = 0$$

$$\frac{B(v_m, \psi_{q+r+k})}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} - \frac{\int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+r+k}(\epsilon)d\epsilon}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} = 0$$

$$B(v_m, \psi_i) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_i(\epsilon)d\epsilon = 0$$

Tenemos entonces:

$$B(v_m, \psi_{q+j}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon = 0$$

$$\frac{B(v_m, \psi_{q+r+k})}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} - \frac{\int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+r+k}(\epsilon)d\epsilon}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} = 0$$

$$B(v_m, \psi_i) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_i(\epsilon)d\epsilon = 0$$

Finalmente concluimos que:

$$B(v_m, \psi_l) = \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon \ para\ 1 \leq l \leq q + r + m$$

Recordando que $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$ y $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$, tenemos:

$$B(v_m, v_m) = \sum_{j=1}^{r} x_{jm}^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 + \sum_{i=1}^{q} z_{im}^2 \lambda_i \leq \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq K^2$$

Recordando que $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$ y $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$, tenemos:

$$B(v_m, v_m) = \sum_{j=1}^{r} x_{jm}^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 + \sum_{i=1}^{q} z_{im}^2 \lambda_i \leq \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq K^2$$

Además, recordemos que $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$ y la siguiente definición:

$$u_m(x, y, z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon)$$

Recordando que $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$ y $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$, tenemos:

$$B(v_m, v_m) = \sum_{j=1}^{r} x_{jm}^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 + \sum_{i=1}^{q} z_{im}^2 \lambda_i \leq \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq K^2$$

Además, recordemos que $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$ y la siguiente definición:

$$u_m(x,y,z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon)$$

Luego, por ii), $|v_m|_0^2 = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{\lambda_{q+r+k}} \leq$

$$\leq |x|^2 + |z|^2 + \frac{|y|^2}{\lambda_{q+r+1}} \leq \bar{r}^2 + (K^*)^2 + \frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}}$$

Recordando que $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_{q+r} = 0$ y $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 0$, tenemos:

$$B(v_m, v_m) = \sum_{j=1}^{r} x_{jm}^2 \lambda_{q+j} + \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 + \sum_{i=1}^{q} z_{im}^2 \lambda_i \leq \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq K^2$$

Además, recordemos que $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$ y la siguiente definición:

$$u_m(x, y, z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{q+r+k}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon)$$

Luego, por ii), $|v_m|_0^2 = \sum_{j=1}^{r} x_j^2 + \sum_{i=1}^{q} z_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{\lambda_{q+r+k}} \leq$

$$\leq |x|^2 + |z|^2 + \frac{|y|^2}{\lambda_{q+r+1}} \leq \bar{r}^2 + (K^*)^2 + \frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}}$$

Luego, por la desigualdad de Garding, existen c_0 y c_1 tales que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que:

$$|v_m|_1^2 \leq \frac{1}{c_1}(K^2 + c_0((K^*)^2 + \bar{r}^2 \frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}}))$$

Por lo tanto, $(v_m)_m$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, existe $v_{m_k} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $v_{m_k} \to v$ en $L^2(\Omega)$ y entonces existe una subsucesión de $(v_{m_k})_k$, a la que volvemos a llamar $(v_{m_k})_k$, tal que $v_{m_k} \to v$ ctp Ω.

Por lo tanto, $(v_m)_m$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, existe $v_{m_k} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $v_{m_k} \to v$ en $L^2(\Omega)$ y entonces existe una subsucesión de $(v_{m_k})_k$, a la que volvemos a llamar $(v_{m_k})_k$, tal que $v_{m_k} \to v$ ctp Ω.

Como f es continua y acotada, por el teorema de convergencia de Lebesgue, sabemos que $f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon) \to f(v(\epsilon), \epsilon)$ en $L^2(\Omega)$ cuando m_k tiende a ∞.

Por lo tanto, $(v_m)_m$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, existe $v_{m_k} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $v_{m_k} \to v$ en $L^2(\Omega)$ y entonces existe una subsucesión de $(v_{m_k})_k$, a la que volvemos a llamar $(v_{m_k})_k$, tal que $v_{m_k} \to v$ ctp Ω.

Como f es continua y acotada, por el teorema de convergencia de Lebesgue, sabemos que $f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon) \to f(v(\epsilon), \epsilon)$ en $L^2(\Omega)$ cuando m_k tiende a ∞.

Fijado $l < m_k + q + r$, vale $B(v_{m_k}, \psi_l) = \int_\Omega f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon$.

Por lo tanto, $(v_m)_m$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, existe $v_{m_k} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $v_{m_k} \to v$ en $L^2(\Omega)$ y entonces existe una subsucesión de $(v_{m_k})_k$, a la que volvemos a llamar $(v_{m_k})_k$, tal que $v_{m_k} \to v$ ctp Ω.

Como f es continua y acotada, por el teorema de convergencia de Lebesgue, sabemos que $f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon) \to f(v(\epsilon), \epsilon)$ en $L^2(\Omega)$ cuando m_k tiende a ∞.

Fijado $l < m_k + q + r$, vale $B(v_{m_k}, \psi_l) = \int_\Omega f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon$.

Tomando límite cuando m_k tiende a ∞, obtenemos para l arbitrario que:

$$B(v, \psi_l) = \int_\Omega f(v(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon$$

Por lo tanto, $(v_m)_m$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, existe $v_{m_k} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $v_{m_k} \to v$ en $L^2(\Omega)$ y entonces existe una subsucesión de $(v_{m_k})_k$, a la que volvemos a llamar $(v_{m_k})_k$, tal que $v_{m_k} \to v$ ctp Ω.

Como f es continua y acotada, por el teorema de convergencia de Lebesgue, sabemos que $f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon) \to f(v(\epsilon), \epsilon)$ en $L^2(\Omega)$ cuando m_k tiende a ∞.

Fijado $l < m_k + q + r$, vale $B(v_{m_k}, \psi_l) = \int_\Omega f(v_{m_k}(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon$.

Tomando límite cuando m_k tiende a ∞, obtenemos para l arbitrario que:

$$B(v, \psi_l) = \int_\Omega f(v(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon$$

Como la aplicación lineal generada por los miembros de la sucesión $(\psi_k)_k$ es densa en $H_0^1(\Omega)$, resulta:

$$B(v, w) = \int_{\Omega} f(v(\epsilon), \epsilon) w(\epsilon) d\epsilon \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega)$$

$$B(v,w) = \int_{\Omega} f(v(\epsilon),\epsilon)w(\epsilon)d\epsilon \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega)$$

Concluimos así que $v \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x),x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Veremos, por último, cómo se relacionan las condiciones (ALP) con las condiciones de Landesman-Lazer.

Veremos, por último, cómo se relacionan las condiciones (ALP) con las condiciones de Landesman-Lazer. Recordemos que:

Veremos, por último, cómo se relacionan las condiciones (ALP) con las condiciones de Landesman-Lazer. Recordemos que:

Condiciones de Landesman-Lazer (LL)

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que $\lim_{s \to +\infty} g(s) = g(+\infty)$ y $\lim_{s \to -\infty} g(s) = g(-\infty)$ existen, son finitos y verifican que $g(-\infty) \leq g(s) \leq g(+\infty)\ \forall\ s$. Y sea $h \in L^2(\Omega)$ a valores reales.

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = g(u(x)) - h(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Notemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de este problema si:

$$B(u, v) = \int_\Omega (g(u) - h)v \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Sea $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $KerL =< w >$, las siguiente desigualdades

$$g(-\infty) \int_{w>0} |w| - g(+\infty) \int_{w<0} |w| \leq < h, w >_0$$

$$y < h, w >_0 \leq g(+\infty) \int_{w>0} |w| - g(-\infty) \int_{w<0} |w|$$

son necesarias para la existencia de solución débil del problema.

Estas condiciones resultan suficientes si estas desigualdades se verifican estrictamente.

Si además restringimos las hipótesis a $g(-\infty) < g(s) < g(+\infty)$ para todo s, ambas condiciones, en su forma estricta, son necesarias y suficientes.

Adaptemos las condiciones (LL) dadas para un ejemplo más sencillo:

Adaptemos las condiciones (LL) dadas para un ejemplo más sencillo:

Consideremos $p \in C([0, T])$ y $g \in C(\mathbb{R})$ acotada y con límites en $+\infty$ y $-\infty$.

La ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ admite una solución $T-$periódica si:

$$g(-\infty) < \bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty)$$

Adaptemos las condiciones (LL) dadas para un ejemplo más sencillo:

Consideremos $p \in C([0, T])$ y $g \in C(\mathbb{R})$ acotada y con límites en $+\infty$ y $-\infty$.

La ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ admite una solución $T-$periódica si:

$$g(-\infty) < \bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty)$$

Además, si $g(-\infty) < g(t) < g(+\infty)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, esta condición es también necesaria ya que:

Si u es una solución $T-$periódica, integrando a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\int_0^T u''(t) + g(u(t))dt = \int_0^T p(t)dt$$

Como $\int_0^T u''(t)dt = u'(T) - u'(0) = 0$ por ser u $T-$ *periódica*, resulta que:

$$\int_0^T g(u(t))dt = \int_0^T p(t)dt$$

Por otra parte, como $g(-\infty) < g(t) < g(+\infty)$, tenemos que:

$$Tg(-\infty) \leq \int_0^T g(u(t))dt \leq Tg(+\infty)$$

Y así concluimos que:

$$g(-\infty) < \frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))dt < g(+\infty)$$

Es decir, por la igualdad probada arriba,

$$g(-\infty) < \bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty)$$

Para estudiar la relación entre ambas condiciones precisaremos la siguiente Proposición:

Para estudiar la relación entre ambas condiciones precisaremos la siguiente Proposición:

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:
1) f satisface (LL);
2) Existen $\bar{\eta} > 0$, $R \geq d$, ψ_-,$\psi_+ \in L^2(\Omega)$ y un conjunto K_M de medida finita tales que:
* $f(x,t) \geq \psi_+(x)$ ctp $x \in \Omega$ y todo $t \geq R$;
* $f(x,t) \geq \psi_-(x)$ ctp $x \in \Omega$ y todo $t \leq -R$;
* Para todo $v \in L^2(\Omega)$ se verifica:

$$\int_{v>0} \psi_+(x)v(x) + \int_{v<0} \psi_-(x)v(x) \geq \bar{\eta}\,\|v\|_2$$

Por otra parte, existe $M > 0$ tal que $-h(x) \leq \psi_+(x) \leq M$ y $-M \leq \psi_-(x) \leq h(x)$ ctp $x \in \Omega$. Y si $x \in \Omega \setminus K_M$, entonces $\psi_+ \leq 0$ y $\psi_- \geq 0$.

Teorema

Condiciones de Landesman-Lazer $\Rightarrow$ Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul

Teorema

Condiciones de Landesman-Lazer $\Rightarrow$ Condiciones de Ahmad-Lazer-Paul

Para su demostración, consideremos el R dado por la Proposición y los siguiente conjuntos:

$$\Omega_v^+ = \{x \in \Omega : v(x) > R\}$$

$$\Omega_v^- = \{x \in \Omega : v(x) < R\}$$

$$\Omega_v^0 = \{x \in \Omega : -R \leq v(x) \leq R\}$$

Como f la supusimos Caratheodory, sabemos que existe $\eta_R \in L^2(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq \eta_R(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall\ |t| < R$.

Como f la supusimos Caratheodory, sabemos que existe $\eta_R \in L^2(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq \eta_R(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall$ $|t| < R$.

Además, por la Proposición, existe $\psi_+ \in L^2(\Omega)$ tal que $f(x,t) \geq \psi_+(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall$ $t \geq R$.

Como f la supusimos Caratheodory, sabemos que existe $\eta_R \in L^2(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq \eta_R(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall\ |t| < R$.

Además, por la Proposición, existe $\psi_+ \in L^2(\Omega)$ tal que $f(x,t) \geq \psi_+(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall\ t \geq R$.

Notemos que si $x \notin K_M$, por la Proposición, $\psi_+(x) \leq 0 \leq M\chi_{K_M}(x)$. Sino, $\psi_+(x) \leq M$. Por lo tanto, $\psi_+(x) \leq M\chi_{K_M}(x)$ para todo x.

Como f la supusimos Caratheodory, sabemos que existe $\eta_R \in L^2(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq \eta_R(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall\ |t| < R$.

Además, por la Proposición, existe $\psi_+ \in L^2(\Omega)$ tal que $f(x,t) \geq \psi_+(x)$ ctp $x \in \Omega$ y $\forall\ t \geq R$.

Notemos que si $x \notin K_M$, por la Proposición, $\psi_+(x) \leq 0 \leq M\chi_{K_M}(x)$. Sino, $\psi_+(x) \leq M$. Por lo tanto, $\psi_+(x) \leq M\chi_{K_M}(x)$ para todo x.

Tenemos entonces que:

$$G(v(x),x) = \int_0^{v(x)} f(s,x)ds = \int_0^R f(s,x)ds + \int_R^{v(x)} f(s,x)ds \geq$$

$$\geq -R\eta_R(x)+(v(x)-R)\psi_+(x) = -R\eta_R(x)+v(x)\psi_+(x)-R\psi_+(x) \geq$$

$$\geq -R\eta_R(x) + v(x)\psi_+(x) - RM\chi_{K_M}(x)\ ctp\ x \in \Omega_v^+.$$

Luego,

$$\int_{\Omega_v^+} G(v(x),x) \geq -R\int_{\Omega_v^+} \eta_R(x) + \int_{\Omega_v^+} v(x)\psi_+(x) - RM\int_{\Omega_v^+} \chi_{K_M}(x) \geq$$

$$\geq -R\,\|\eta_R\|_1 + \int_{\Omega_v^+=\{v>R\}} v(x)\psi_+(x) - RM|K_M| =$$

$$= -R(\|\eta_R\|_1 + M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) - \int_{\{0<v\leq R\}} v(x)\psi_+(x) \geq$$

$$\int_{\Omega_v^+} G(v(x),x) \geq -R\int_{\Omega_v^+} \eta_R(x) + \int_{\Omega_v^+} v(x)\psi_+(x) - RM\int_{\Omega_v^+} \chi_{K_M}(x) \geq$$

$$\geq -R\,\|\eta_R\|_1 + \int_{\Omega_v^+=\{v>R\}} v(x)\psi_+(x) - RM|K_M| =$$

$$= -R(\|\eta_R\|_1 + M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) - \int_{\{0<v\leq R\}} v(x)\psi_+(x) \geq$$

Como $\psi_+(x) \leq M\chi_{K_M}(x)$ para todo x,

$$\geq -R(\|\eta_R\|_1 + M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) - RM|K_M| =$$

$$= -R(\|\eta_R\|_1 + 2M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x)$$

Análogamente se puede probar que:

$$\int_{\Omega_v^-} G(v(x),x) \geq -R(\|\eta_R\|_1 + 2M|K_M|) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

$$\int_{\Omega_v^0} G(v(x),x) \geq -R\,\|\eta_R\|_1$$

Análogamente se puede probar que:

$$\int_{\Omega_v^-} G(v(x), x) \geq -R(\|\eta_R\|_1 + 2M|K_M|) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

$$\int_{\Omega_v^0} G(v(x), x) \geq -R\,\|\eta_R\|_1$$

Conlcuimos entonces que:

$$\int_{\Omega} G(v(x), x) = \int_{\Omega_v^+} G(v(x), x) + \int_{\Omega_v^-} G(v(x), x) + \int_{\Omega_v^0} G(v(x), x) \geq$$

$$\geq -R(3\,\|\eta_R\|_1 + 4M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

Análogamente se puede probar que:

$$\int_{\Omega_v^-} G(v(x),x) \geq -R(\|\eta_R\|_1 + 2M|K_M|) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

$$\int_{\Omega_v^0} G(v(x),x) \geq -R\,\|\eta_R\|_1$$

Conlcuimos entonces que:

$$\int_{\Omega} G(v(x),x) = \int_{\Omega_v^+} G(v(x),x) + \int_{\Omega_v^-} G(v(x),x) + \int_{\Omega_v^0} G(v(x),x) \geq$$

$$\geq -R(3\,\|\eta_R\|_1 + 4M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

Por la Proposición,

$$\geq -R(3\,\|\eta_R\|_1 + 4M|K_M|) + \bar{\eta}\,\|v\|_2$$

Análogamente se puede probar que:

$$\int_{\Omega_v^-} G(v(x),x) \geq -R(\|\eta_R\|_1 + 2M|K_M|) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

$$\int_{\Omega_v^0} G(v(x),x) \geq -R\,\|\eta_R\|_1$$

Conlcuimos entonces que:

$$\int_{\Omega} G(v(x),x) = \int_{\Omega_v^+} G(v(x),x) + \int_{\Omega_v^-} G(v(x),x) + \int_{\Omega_v^0} G(v(x),x) \geq$$

$$\geq -R(3\,\|\eta_R\|_1 + 4M|K_M|) + \int_{\{v>0\}} v(x)\psi_+(x) + \int_{\{v<0\}} v(x)\psi_-(x)$$

Por la Proposición,

$$\geq -R(3\,\|\eta_R\|_1 + 4M|K_M|) + \bar{\eta}\,\|v\|_2$$

Luego, $\lim\limits_{\|v\|_2 \to +\infty} \int_{\Omega} G(v(x),x) = +\infty \ \forall \ v \in KerL.$

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Por (LL) la ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ con $\bar{p} = 0$ admite solución si $g(-\infty) < \bar{p} = 0 < g(+\infty)$.

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Por (LL) la ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ con $\bar{p} = 0$ admite solución si $g(-\infty) < \bar{p} = 0 < g(+\infty)$.

Consideremos $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Por (LL) la ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ con $\bar{p} = 0$ admite solución si $g(-\infty) < \bar{p} = 0 < g(+\infty)$.

Consideremos $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Notemos que, como $0 < g(+\infty)$, existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $g(s) \geq r$ para todo $s \geq M$. Por lo tanto,

$$\int_M^{+\infty} g(s)ds \geq \int_M^{+\infty} rds = +\infty$$

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Por (LL) la ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ con $\bar{p} = 0$ admite solución si $g(-\infty) < \bar{p} = 0 < g(+\infty)$.

Consideremos $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Notemos que, como $0 < g(+\infty)$, existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $g(s) \geq r$ para todo $s \geq M$. Por lo tanto,

$$\int_M^{+\infty} g(s)ds \geq \int_M^{+\infty} rds = +\infty$$

Luego,

$$G(+\infty) = \int_0^{+\infty} g(s)ds = \int_0^M g(s)ds + \int_M^{+\infty} g(s)ds = +\infty$$

Veamos esta relación entre ambas condiciones en un ejemplo más sencillo:

Por (LL) la ecuación $u'' + g(u) = p(t)$ con $\bar{p} = 0$ admite solución si $g(-\infty) < \bar{p} = 0 < g(+\infty)$.

Consideremos $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Notemos que, como $0 < g(+\infty)$, existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $g(s) \geq r$ para todo $s \geq M$. Por lo tanto,

$$\int_M^{+\infty} g(s)ds \geq \int_M^{+\infty} rds = +\infty$$

Luego,

$$G(+\infty) = \int_0^{+\infty} g(s)ds = \int_0^M g(s)ds + \int_M^{+\infty} g(s)ds = +\infty$$

Análogamente, resulta que $G(-\infty) = \int_0^{+\infty} g(s)ds = +\infty$