Condición suficiente sobre Ω para la existencia de primitivas (condición cohomológica)

Nicolás S. Botbol, 31-10-05

Motivados por generalizar el teorema de Cuachy (1), se verá a continuación una condición suficiente sobre la topología de Ω para la existencia de primitivas para f, donde f es cualquier función holomorfa sobre Ω.

Es decir, se busca caracterizar los dominios Ω tales que para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$

(1) *Teorema*: Sea $\Omega := D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ (el disco abierto de radio r con centro en z_0). Entonces toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admite primitiva.

Se puede probar que la condición que se hallará da una caracterización completa de los dominios con tal propiedad, o sea, esta condición es suficiente y necesaria.

Primero serán dadas algunas definiciones necesarias.

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de Ω.

Consideremos ahora $I' \subset I \times I$, donde

$$I' := \{(i, j) \text{ tales que } U_i \cap U_j \neq \varnothing\}$$

Sea $V \subset \mathbb{C}$ abierto, y se define

$$\mathbb{C}(V) := \{f : V \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ es localmente constante}\},$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := \textstyle\prod_{(i,j)\in I'} \mathbb{C}(U_i \cup U_j),$$

$Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := \{(c_{ij})_{(i,j)\in I'} \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ tales que $c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 0$ en $U_i \cup U_j \cup U_k$ donde $U_i \cup U_j \cup U_k \neq \varnothing\}$ y

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := \textstyle\prod_{i\in I} \mathbb{C}(U_i).$$

Se llamará 1-cocadena y 0-cocadena de $\mathcal{U}$ a valores en $\mathbb{C}$ a los elementos de $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ y $C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ respectivamente. Y 1-cociclo de $\mathcal{U}$ a valores en $\mathbb{C}$ a los elementos de $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$.

Es fácil ver que los tres conjuntos, $C^0(\mathcal{U},\mathbb{C})$, $C^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ y $Z^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Además, $Z^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) \subset C^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ por definición.

A esta altura resulta natural querer definir $C^2(\mathcal{U},\mathbb{C})$, cuyos elementos se llamarán 2-cocadena de $\mathcal{U}$ a valores en $\mathbb{C}$, para ello definiremos previamente

$I' := \{(i,j,k)$ tales que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing\}$

$C^2(\mathcal{U},\mathbb{C}) := \prod_{(i,j,k)\in I''} \mathbb{C}(U_i \cup U_j \cup U_k)$,

Consideremos entonces la siguiente estructura:

$C^0(\mathcal{U},\mathbb{C}) \rightarrow^{d_0} C^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) \rightarrow^{d_1} C^2(\mathcal{U},\mathbb{C})$

Como observamos antes, estos objetos son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, las aplicaciones d_0 y d_1 serán morfismos de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, definidas como sigue:

$d_0 : C^0(\mathcal{U},\mathbb{C}) \rightarrow C^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$

Sea $(c_i)_{i\in I}$ un elemento de $C^0(\mathcal{U},\mathbb{C})$, definimos $d_0((c_i)_{i\in I}) = (c_i - c_j)_{(i,j)\in I'}$ donde c_i y c_j representan las restricciones de c_i y c_j (respectivamente) a $U_i \cup U_j$

$d_1 : C^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) \rightarrow C^2(\mathcal{U},\mathbb{C})$

Sea $(c_{ij})_{(i,j)\in I'}$ un elemento de $C^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$, definimos $d_1((c_{ij})_{(i,j)\in I'}) = (c_{ij} + c_{jk} + c_{ki})_{(i,j,k)\in I''}$ donde c_{ij}, c_{jk} y c_{ki} representan las restricciones de c_{ij}, c_{jk} y c_{ki} (respectivamente) a $U_i \cup U_j \cup U_k$

Observar que ahora se podría definir $Z^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ como el núcleo de d_1.

Una sucesión de espacios vectoriales con morfismo de espacios vectoriales tales que la composición de dos consecutivos da cero se la definida se denomina complejo de cocadenas de $\mathcal{U}$.

Veamos ahora que $d_1 d_0 = 0$. Para ello tomamos un elemento $(c_{ij})_{(i,j)\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathbb{C})$ y calculamos $d_1 d_0((c_{ij})_{(i,j)\in I})$:

Se escribirá $(c_{ij}) = (c_{ij})_{(i,j)\in I}$ para alivianar la notacíOn.

$d_1 d_0(c_{ij}) = d_1(c_i - c_j) = (c_i - c_j) + (c_j - c_k) + (c_k - c_i) = 0$

Esto además dice que $Im(d_0) \subset Ker(d_1)$. Recordando la definición de $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ y definiendo

$$B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := Im(d_0)$$

Un elemento de $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := Im(d_0)$ se llamará un 1-coborde de $\mathcal{U}$ a valores en $\mathbb{C}$.

Escribimos que $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Ahora, como d_0 es un morfismo de espacios vectoriales, se tiene que $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := Im(d_0)$ es un subespacio vectorial de $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := Im(d_0)$

Esto permite definir el el espacio vectorial cociente:

$$H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})/B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}).$$

Se dirá que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ es el primer grupo de cohomología asociado a $\mathcal{U}$ a valores en $\mathbb{C}$.

Con todas las definiciones anteriores ya se está en condiciones de enunciar el teorema esperado (generalización del teorema de Cauchy (1))

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por discos abiertos de Ω, es decir, cada U_i es un disco abierto de $\mathbb{C}$. Supongamos que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$, entonces toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admite primitiva.

Dem: Se quiere ver que toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admite primitiva. Como todo U_i es un disco abierto de $\mathbb{C}$, se sabe, por el teorema de Cauchy (1) sobre U_i, que f admite primitiva en U_i, que se denominará F_i.

Se verá que se puede definir una primitiva global F sobre todo Ω.

Para ello, sea $(i, j) \in I'$, se define $c_{ij} = F_i - F_j$ sobre el abierto $U_i \cap U_j$. Como $U_i \cap U_j$ es conexo y F_i y F_j son dos primitivas de f en ese abierto, entonces difieren en una constante, entonces c_{ij} es constante en $U_i \cap U_j$.

Sea ahora $(i, j, k) \in I''$, se tiene que $d^1((c_{ij})_{(i,j) \in I'}) = c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = (F_i - F_j) + (F_j - F_k) + (F_k - F_i) = 0$

Por lo tanto, $(c_{ij})_{(i,j) \in I'} \in Ker(d^1) = Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, pero como $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$, esto dice que $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, entonces $(c_{ij})_{(i,j) \in I'} \in Im(d^0) = B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$.

Sea $\varsigma = (c_{ij})_{(i,j)\in I'}$, se vió que existe $c \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ tal que $d^0(c) = \varsigma$, donde $c = (c_i)_{i\in I}$ y cada $c_i \in \mathbb{C}(U_i)$ tal que al aplicar d^0:

$F_i - F_j = c_i - c_j$ en $U_i \cap U_j$ para cada $(i, j) \in I'$.

Esto además dice que $F_i - c_i = F_j - c_j$ en $U_i \cap U_j$ para cada $(i, j) \in I'$.

Defínase ahora F sobre todo Ω tal que $F|_{U_i} = F_i - c_i$ y como $F_i - c_i = F_j - c_j$ en $U_i \cap U_j$ para cada $(i, j) \in I'$, esta definición tiene sentido.

Como cada c_i es constante, entonces $F|_{U_i} = F_i - c_i$ es una primitiva de f en cada U_i. Y como $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por discos abiertos de Ω, entonces F es una primitiva de f en Ω. $\square$

Además se puede probar que esta propiedad caracteriza a los espacios Ω tales que toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admite primitiva.

También se puede probar que estos espacios son aquellos para los cuales $\Pi_1(\Omega) = 0$, es decir, los espacios simplemente conexos.