NOTAS SOBRE COMPLEJOS SOBRE EL ÁLGEBRA EXTERIOR

Nicolás S. Botbol - FCEyN - UBA

1 El complejo de Koszul

El complejo de Koszul fue primeramente introducido por Jean-Louis Koszul para definir una teoría de cohomología para álgebras de Lie, y resuló ser una construcción homológica muy valiosa para el álgebra conmutativa.

Para comenzar supongamos que se tiene A es un anillo (asumiremos que es conmutativo, con unidad y por ahora no necesariamente noetheriano ni local, aunque tal vez sí más adelante), y M un A-módulo. Sea y un elemento de A, entonces el morfismo "multiplicar por y" (que se denotará con y) es un morfismo de A-módulos, de A en A. Agregando ceros fácilmente podemos obtener un complejo:

$$\mathcal{K}(y) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{y} A \longrightarrow 0$$

y resulta ser el complejo de Koszul asociado a y (también se puede notar como $\mathcal{K}_\bullet(y)$).

Este caso simple ilustra dos porpiedades importantes del complejo de Koszul. Si se indexa con la posición cero a la copia de A que está a la derecha y con uno a la qie está a la izquierda, se puede observar que la homologóa en lugar cero es la imagen homomórfica de A módulo los múltimplos de y. Y la homologóa en primer lugar representa el anulador del elemento y. Es decir:

$$H_0(\mathcal{K}_\bullet(y)) = A/A(y),$$
$$H_1(\mathcal{K}_\bullet(y)) = Ann(\{y\})$$

Supóngase ahora que se tiene dos elementos x, y en A, considérese la sucesión (ordenada) x, y, que se puede pensar como un vector en A^2. Se construye el complejo de Koszul asociado a la sucesión x, y, $\mathcal{K}_\bullet(x, y)$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{K}_\bullet(x, y) : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi_1} A^2 \xrightarrow{\varphi_0} A \longrightarrow 0$$

Donde los morfismos φ_0 y φ_1 son tales que φ_0 es la matriz vertical $(x, y)^t$ y φ_1 es la matrix horizontal $(-y, x)$. La condición $(x, y)^t.(-y, x) = 0$ dice que $\mathcal{K}_\bullet(x, y)$ resulta ser un complejo.

Más generalmente, dados elementos $x_1, ..., x_n$ del anillo A, se construye el complejo de Koszul asociado a la sucesión (importa el orden) $x_1, ..., x_n$, denotado por $\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)$, como el producto tensorial en la categoría de A-complejos de los complejos $\mathcal{K}_\bullet(x_i)$, para cada i.

Se definirá a continuación el producto tensorial de complejos:

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los complejos de cadenas (análogamente se hace para complejos de cocadenas)

$$\mathcal{F}: \qquad \ldots \xrightarrow{\varphi_{i+2}} F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \ldots \text{ y}$$

$$\mathcal{G}: \qquad \ldots \xrightarrow{\psi_{i+2}} G_{i+1} \xrightarrow{\psi_{i+1}} G_i \xrightarrow{\psi_i} G_{i-1} \xrightarrow{\psi_{i-1}} \ldots$$

Se tiene el siguiente digrama asociado al producto tensorial:

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots \arrow[r] & F_{i+1} \otimes G_{j-1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j-1}"] \arrow[r, "\varphi_{i+1}\otimes 1"] & F_i \otimes G_{j-1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j-1}"] \arrow[r, "\varphi_i\otimes 1"] & F_{i-1} \otimes G_{j-1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j-1}"] \arrow[r, "\varphi_{i-1}\otimes 1"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & F_{i+1} \otimes G_j \arrow[u, "1\otimes\psi_j"] \arrow[r, "\varphi_{i+1}\otimes 1"] & F_i \otimes G_j \arrow[u, "1\otimes\psi_j"] \arrow[r, "\varphi_i\otimes 1"] & F_{i-1} \otimes G_j \arrow[u, "1\otimes\psi_j"] \arrow[r, "\varphi_{i-1}\otimes 1"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & F_{i+1} \otimes G_{j+1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j+1}"] \arrow[r, "\varphi_{i+1}\otimes 1"] & F_i \otimes G_{j+1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j+1}"] \arrow[r, "\varphi_i\otimes 1"] & F_{i-1} \otimes G_{j+1} \arrow[u, "1\otimes\psi_{j+1}"] \arrow[r, "\varphi_{i-1}\otimes 1"] & \ldots \\
& \vdots \arrow[u, "1\otimes\psi_{j+2}"] & \vdots \arrow[u, "\psi_{j+2}"] & \vdots \arrow[u, "1\otimes\psi_{j+2}"] &
\end{tikzcd}$$

Sea D_k el elemento que resulta de la suma de los elemtos de la "k-ésima" diagonal. Más precisamente, $D_k = \sum_{i+j=k} F_i \otimes G_j$. Como el caso estudiado es el caso de complejos finitos, se tendrá que $D_k = \bigoplus_{i+j=k} F_i \otimes G_j$, con lo cual queda definido el complejo producto como:

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}: \qquad \ldots \xrightarrow{\phi_{k+2}} D_{k+1} \xrightarrow{\phi_{k+1}} D_k \xrightarrow{\phi_k} D_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \ldots$$

Donde los morfismos ϕ_k están definidos de la siguiente forma:

$\phi_k|_{F_i \otimes G_j} : F_i \otimes G_j \to F_r \otimes G_s$

$\phi_k|_{F_i \otimes G_j} = \varphi_{i-1} \otimes 1$, si $r = i - 1$
$\phi_k|_{F_i \otimes G_j} = (-1)^i 1 \otimes \psi_{j-1}$, si $s = j - 1$
$\phi_k|_{F_i \otimes G_j} = 0$, en caso contrario.

Se puede verificar fácilmente que con estos morfismos $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ resulta ser un complejo de cadenas, que es el producto tensorial de $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$ en la categoría de complejos de cadenas.

Como se comentó antes, esta construcción es idéntica si se trabaja con complejos de cocadenas.

Se estudiarán ahora los tres casos particulares más simples, es decir, los complejos de Koszul asociados a sucesiones de longitud uno, dos y tres, mediante la tensorización de complejos de longitudes más chicas. Posteriormente se generalizará la idea de la contrucción de complejos asociados a sucesiones de longitud arbitraria (finita) mediante la tensorización de otros más pequeos, para luego dar una fórmula no inductiva para ésta contrucción.

Volviendo a la construcción del complejo de Koszul asociado a la sucesión x, y, veremos ahora cómo es que éste resulta del producto tensorial de dos complejos de Koszul.

Consideremos el complejo de Koszul asociado a x, $\mathcal{K}_\bullet(x)$, y el asociado a y, $\mathcal{K}_\bullet(y)$. Por esta vez se notará por A_0 y A_1 a los anillos para poder distinguirlos (aun que esto resulta redundante, faciltará la comprensión).

$$\mathcal{K}_\bullet(x) \qquad 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{x} A_0 \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{K}_\bullet(y) \qquad 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{y} A_0 \longrightarrow 0$$

Observemos ahora el diagrama asociado al producto tensorial de los complejos anteriores

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A_0 \otimes A_1 \arrow[u] \arrow[r, "x\otimes 1"] & A_0 \otimes A_0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes A_1 \arrow[u, "1\otimes y"] \arrow[r, "x\otimes 1"] & A_1 \otimes A_0 \arrow[u, "1\otimes y"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

A partir de este diagrama obtenemos el complejo producto:

$$\mathcal{K}_\bullet(x) \otimes \mathcal{K}_\bullet(y) : 0 \longrightarrow A_1 \otimes A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_0 \otimes A_1 \oplus A_1 \otimes A_1 \xrightarrow{\varphi_0} A_0 \otimes A_0 \longrightarrow 0,$$

donde los morfismos φ_0 y φ_1 se definen como antes, es decir:

$\varphi_0 : A_0 \otimes A_1 \oplus A_1 \otimes A_1 \to A_0 \otimes A_0$ definido como la matriz vertical $(x \otimes 1, 1 \otimes y)$, y

$\varphi_1 : A_1 \otimes A_1 \to A_0 \otimes A_1 \oplus A_1 \otimes A_1$ definido como la matriz horizonal $(-1 \otimes y, x \otimes 1)$.

Escribiendo ahora A_0 y A_1 como A, y mediane las identificaciones ya conocidas para el producto tensorial, se notará $A_0 \otimes A_1$ con A y $A_0 \otimes A_1 \oplus A_1 \otimes A_1$ con $A \oplus A$. Además identificando $1 \otimes x$ y $x \otimes 1$ con el elemento x del anillo A, y $1 \otimes y$ y $y \otimes 1$ con el elemento y, se obtiene el siguiente complejo:

$$\mathcal{K}_\bullet(x) \otimes \mathcal{K}_\bullet(y) : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{(-y,x)} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)^t} A \longrightarrow 0,$$

que será llamado $\mathcal{K}_\bullet(x, y)$, de acuerdo a lo establecido al comienzo del parágrafo.

Tal como se advirtió, se procederá ahora a la construcción de un complejo de longitud tres, es decir, dado el elemento (x,y,z) en el A-módulo libre $M = A^3$, se contruirá el complejo $\mathcal{K}_\bullet(x,y,z)$, tensorizando los tres complejos de longitud uno. Es decir, $\mathcal{K}_\bullet(x,y,z) = \mathcal{K}_\bullet(x) \otimes \mathcal{K}_\bullet(y) \otimes \mathcal{K}_\bullet(z)$.

Por la asociatividad del producto tensorial en la categoría de complejos, bastará calcular $\mathcal{K}_\bullet(x,y) \otimes \mathcal{K}_\bullet(z)$, y para ello se construye el diagrama asociado:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \otimes A \arrow[u] \arrow[r, "(-y,x)\otimes 1"] & A^2 \otimes A \arrow[u] \arrow[r, "(x,y)^t\otimes 1"] & A \otimes A \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \otimes A \arrow[u, "1\otimes z"] \arrow[r, "(-y,x)\otimes 1"] & A^2 \otimes A \arrow[u, "Id\otimes z"] \arrow[r, "(x,y)^t\otimes 1"] & A \otimes A \arrow[u, "1\otimes z"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

A partir de este diagrama obtenemos el complejo producto:

$\mathcal{K}_\bullet(x,y) \otimes \mathcal{K}_\bullet(z)$:

$$0 \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{\varphi_2} A \otimes A \oplus A^2 \otimes A \xrightarrow{\varphi_1} A^2 \otimes A \oplus A \otimes A \xrightarrow{\varphi_0} A \otimes A \longrightarrow 0,$$

donde los morfismos φ_0, φ_1 y φ_2 se definen de la siguiente forma:

$\varphi_0 : A^2 \otimes A \oplus A \otimes A \to A \otimes A$ se define como la matriz vertical $((x,y)^t \otimes 1, 1 \otimes z)^t$,

$\varphi_1 : A \otimes A \oplus A^2 \otimes A \to A^2 \otimes A \oplus A \otimes A$ se define como la matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} (-y,x)\otimes 1 & 0 \\ -Id \otimes z & (x,y)^t \otimes 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi_2 : A \otimes A \to A \otimes A \oplus A^2 \otimes A$ definido como la matriz horizontal $(1 \otimes z, (-y,x) \otimes 1)$.

Nuevamente, se identifica $A \otimes A$ con A, $(1 \otimes z, (-y,x) \otimes 1)$ con $(z, -y, x)$, $((x,y)^t \otimes 1, 1 \otimes z)^t$ con $(x,y,z)^t$ y la matriz $\begin{pmatrix} (-y,x)\otimes 1 & 0 \\ -Id \otimes z & (x,y)^t \otimes 1 \end{pmatrix}$ con la matriz $\begin{pmatrix} -y & x & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & -z & y \end{pmatrix}$.

Luego de todas estas identificaciones se obtiene el siguiente complejo:

$$\mathcal{K}_\bullet(x,y) \otimes \mathcal{K}_\bullet(z) : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{(z,-y,x)} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & x & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & -z & y \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{(x,y,z)^t} A \longrightarrow 0$$

Este es el complejo de Koszul asociado a la sucesión x, y, z, que se denota por $\mathcal{K}_\bullet(x,y,z)$.

Como se comentó antes se puede obtener el complejo de Koszul asociado a una sucesión arbitraria (finita), $x_1, ..., x_n$, de elementos del anillo A, $\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)$, mediante a tensorización de los complejos $\mathcal{K}_\bullet(x_i)$, es decir

$\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n) = \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_i)$.

De esto se deduce que como el producto tensorial de complejos es conmutativo (salvo isomorfismos), entonces el complejo de Koszul asociado a una sucesión, resulta invaiante (salvo isomorfismos) por reordenamientos en la sucesión. Es decir, dado σ un elemento del grupo de automorfismos G_n, se tiene que

$\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n) = \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_i) \simeq \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_{\sigma(i)}) = \mathcal{K}_\bullet(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$.

Esta construcción puede automatizarse de la siguiente manera:

Dado A un anillo con las mismas hipótesis que hasta recién, un un A-módulo libre M de dimensión n, consideremos el álgebra exterior $\bigwedge M = \bigoplus \bigwedge^i M$, como ya se sabe, $\bigwedge^i M$ es un A-módulo libre de dimensión $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ y resulta ser el módulo trivial si $i > n$.

Con esta notación, el complejo de Koszul asociado a la sucesión $x_1, ..., x_n$, resulta ser el complejo del álgebra exterior de $M = A^n$, es decir:

$\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)$:
$0 \longrightarrow \bigwedge^n M \xrightarrow{\varphi_{n-1}} ... \longrightarrow \bigwedge^{i+1} M \xrightarrow{\varphi_i} \bigwedge^i M \longrightarrow ... \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^1 M \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^0 M \longrightarrow 0,$

donde los morfismos $\varphi_i : \bigwedge^{i+1} M \to \bigwedge^i M$, están definidos de la siguiente forma:

Dado el elemento $e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_{i+1}} \in \bigwedge^{i+1} M$,
$\varphi_i(e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_{i+1}}) = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j-1} x_{k_j} e_{k_1} \wedge ... \wedge \widehat{e_{k_j}} \wedge ... \wedge e_{k_{i+1}}$

Veamos que esta construcción del complejo de Koszul es equivalente a la anterior en los casos de sucesiones de logitud uno, dos y tres.

En el caso del complejo de longitud uno, cuya sucesión es la sucesión x, es claro que el complejo que se obtiene es:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(x): & 0 \arrow[r] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

entonces se tiene el complejo siguiente, tal como se esperaba:

$$\mathcal{K}_\bullet(x): \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow 0$$

ya que en este caso $M = A^0$, y por lo tanto $\bigwedge^1 M \cong \bigwedge^0 M \cong A$, y el morfismo $\varphi : \bigwedge^1 M \to \bigwedge^0 M$ resulta ser la multiplicación por x.

Para el caso de sucesiones de longitud dos, es decir dado $(x,y) \in M = A^2$, se tiene que:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(x,y): & 0 \arrow[r] & \bigwedge^2 M \arrow[r, "\varphi_1"] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "\cong"] & A^2 \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

De acuerdo con la fórmula anterior, los morfismos quedan definidos de la siguiente manera:

Dado el elemento $e_1 \wedge e_2 \in \bigwedge^2 M$,

$\varphi_1(e_1 \wedge e_2) = (-1)^0 x e_2 + (-1)^1 y e_1 = -y e_1 + x e_2$, que se corresponde con la matriz horizotal $(-y, x)$.

A su vez, dados los elementos e_1, e_2 en $\bigwedge^1 M$

$\varphi_0(e_1) = (-1)^0 x.1 = x$, y $\varphi_0(e_2) = (-1)^0 y.1 = y$ que se corresponde con la matriz horizotal $(x,y)^t$.

Tal como se deseaba, se obtiene el complejo de Koszul $\mathcal{K}_\bullet(x,y)$ ya calculado.

Finalmente, para el caso de sucesiones de longitud tres, o sea para elementos $(x,y,z) \in M = A^3$, se tiene que:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(x,y,z): 0 \arrow[r] & \bigwedge^3 M \arrow[r, "\varphi_2"] & \bigwedge^2 M \arrow[r, "\varphi_1"] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & A \arrow[u, "\cong"] & A^3 \arrow[u, "\cong"] & A^3 \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Nuevamente de acuerdo con la fórmula anterior, los morfismos quedan definidos de la siguiente manera:

Se considerarán las bases ordenadas

$\mathcal{B}_\prime = \{1\}$ de $\bigwedge^0 M$,

$\mathcal{B}_1 = \{e_0, e_1, e_2\}$ de $\bigwedge^1 M$,

$\mathcal{B}_2 = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ de $\bigwedge^2 M$,

$\mathcal{B}_3 = \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ de $\bigwedge^3 M$

Entonces, dado el elemento $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in \bigwedge^3 M$,

$\varphi_2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = (-1)^0 x e_2 \wedge e_3 + (-1)^1 y e_1 \wedge e_3 + (-1)^2 z e_1 \wedge e_2 =$

$= z e_1 \wedge e_2 - y e_1 \wedge e_3 + x e_2 \wedge e_3$, que se corresponde con la matriz horizotal $(z, -y, x)$.

Ahora, dados los elementos $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ y $e_2 \wedge e_3$ en $\bigwedge^2 M$

$\varphi_1(e_1 \wedge e_2) = (-1)^0 x e_2 + (-1)^1 y e_1 = -y e_1 + x e_2$, $\varphi_1(e_1 \wedge e_3) = (-1)^0 x e_3 + (-1)^1 z.e_1 = -z.e_1 + x e_3$ y $\varphi_1(e_2 \wedge e_3) = (-1)^0 y e_3 + (-1)^1 z e_2 = -z e_2 + y e_3$. Esta φ_1 se corresponde con la matriz cuadrada $\begin{pmatrix} -y & x & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & -z & y \end{pmatrix}$.

Finalmente, dados los elementos e_1, e_2 y e_3 en $\bigwedge^1 M$
$\varphi_0(e_1) = (-1)^0 x.1 = x$, y $\varphi_0(e_2) = (-1)^0 y.1 = y$, $\varphi_0(e_3) = (-1)^0 z.1 = z$ que se corresponde con la matriz horizotal $(x, y, z)^t$.

Tal como se esperaba, se obtiene el complejo de Koszul $\mathcal{K}_\bullet(x, y, z)$ antes calculado.

Se expondrá a continuación algunos ejemplos de sucesiones y sus complejos asociados.

1.1 Ejemplo. : Para comenzar, estudiaremos aquí el caso más simple. Sea K un cuerpo, $A = K[X]$ el anillo de polinomios con coeficientes en K, sea X una sucesión de longitud uno, es decir $X \in A^1 = M$.

Consideremos el complejos de Koszul asociado a la suesión mencionada:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(X): & 0 \arrow[r] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

donde el morfsmo φ_0 está dado por la multipicación, como se pudo estudia antes, es decir, se tiene el siguiente complejo:

$$\mathcal{K}_\bullet(X): \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{X} A \longrightarrow 0$$

Se introducirá aquí la notación de shift que se usará en el resto del trabajo. Dado $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ un A-módulo graduado, se notará por $M[n]$ al A-módulo que tiene en la j-ésima posición de su graduación al objeto M_{j+n}.

En este caso el anillo a considerar es el amillo de polinomios, que resulta $\mathbb{N}_0$-graduado de acuerdo al grado, es decir que se tiene que $K[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K_n[X]$, donde por $K_n[X]$ se entiende al espacio vectorial unidimensional formado por los polinomios homegeneos de grado n con coeficientes en K (donde se entiende que $K_0[X]$ denota las constantes incluyendo al cero). Es claro que la multiplicación por X es un endomorfismo de A graduado, de grado 1, ya que dado $a \in A$, resulta que $deg(a.X) = deg(a) + 1$, podemos escribir entonces al complejo con su notación estándar

$$\mathcal{K}_\bullet(X): \qquad 0 \longrightarrow A[-1] \xrightarrow{X} A \longrightarrow 0$$

Se procederá ahora al cálculo de los grupos de homología:

$H_0(\mathcal{K}_\bullet(X)) = A/(X)$,
$H_1(\mathcal{K}_\bullet(X)) = ker(X)/0 = Ann(\{X\}) = 0$, ya que $K[X]$ es íntegro.

Aunque este caso es poco ilustrativo, se pude observar que como X no es divisor de cero en A, entonces la sucesión considerada es regular (se entinede por sucesión regular a una sucesión regular sobre A, se asumirá esto a menos que se explicite algo distinto). Además, se puede ver que el complejo de Koszul resulta ser una resolución libre del anillo cociente A/I, donde en este caso $I = (X)$.

Recuérdese que esto siguinifica que el complejo extendido

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\bullet(X): \qquad 0 \longrightarrow A[-1] \xrightarrow{X} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

Es acíclico, es decir que tiene todos sus grupos de homología nulos.

1.2 Ejemplo. : Consideremos ahora un caso apenas más compejo. Sea K un cuerpo, $A = K[X,Y]$ el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes en K, sea X, Y una sucesión de longitud dos. Entonces el tiene el complejo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(X,Y): & 0 \arrow[r] & \bigwedge^2 M \arrow[r, "\varphi_1"] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "\cong"] & A^2 \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Reemplazando los morfismos por los correspondiente (que también resultan ser morfismos graduados de grado uno) y usando la notación de shifts, se obtiene:

$$\mathcal{K}_\bullet(X,Y): 0 \longrightarrow A[-2] \xrightarrow{(-Y,X)} A^2[-1] \xrightarrow{(X,Y)^t} A \longrightarrow 0$$

Como se hizo antes, ahora calcularán los grupos de homología:

$H_0(\mathcal{K}_\bullet(X,Y)) = A/(X,Y) = A/I$,

$H_1(\mathcal{K}_\bullet(X,Y)) = ker(X,Y)/Im(-Y,X)$, como dados $p, q \in A$, se tiene que $pX + qY = 0$, y usando la unicidad de factorización en A, se tiene que $ker(X,Y) \subseteq Im(-Y,X)$ y por lo tanto se tiene que $H_1(\mathcal{K}_\bullet(X,Y)) = 0$

$H_2(\mathcal{K}_\bullet(X,Y)) = ker(-Y,X)/0$, por la integridad de A se tiene que
$H_2(\mathcal{K}_\bullet(X,Y)) = 0$

Nuevamente, es fácil ver que la sucesión considerada en este ejemplo es una sucesión regular. Obsérvese también que este complejo calculado también resulta una resolución libre del anillo cociente A/I, donde I denotal el ideal cuyos generadores son los dos elementos de la sucesión. Se tiene entonces que el complejo extendido

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\bullet(X,Y): 0 \longrightarrow A[-2] \xrightarrow{(-Y,X)} A^2[-1] \xrightarrow{(X,Y)^t} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

es acíclico.

1.3 Ejemplo. : Finamete se verá ahora un ejemplo de una sucesión que no es regular, se podrá observar que el complejo asociado no resulta una resolución del anillo cociente. Consideremos para ello K un cuerpo, $A = K[X,Y]$ como antes, sea X, X^2 una sucesión de longitud dos. Se notará $I = (X, X^2) = (X)$. Se construye el complejo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_\bullet(X,X^2): & 0 \arrow[r] & \bigwedge^2 M \arrow[r, "\varphi_1"] & \bigwedge^1 M \arrow[r, "\varphi_0"] & \bigwedge^0 M \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "\cong"] & A^2 \arrow[u, "\cong"] & A \arrow[u, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Obsérvese que en este caso también los morfismos resultan ser graduados, pero la graduación no es uno, ya que la multiplicación por X^2 tiene grado dos. Por ello, usando la notación de shifts, se obtiene:

$$\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)):\ 0 \longrightarrow A[-3] \xrightarrow{(-X^2,X)} A^2[-1,-2] \xrightarrow{(X,X^2)^t} A \longrightarrow 0,$$

donde claramente $A^2[-1,-2] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(K_{n-1}[X,Y] \oplus K_{n-2}[X,Y])$, y $K_{-1}[X,Y] = 0$.

Como se hizo antes, ahora calcularán los grupos de homología:

$H_0(\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)) = A/(X,X^2) = A/(X) \simeq K[Y]$,
$H_1(\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)) = ker(X,X^2)/Im(-X^2,X)$,
como dados $p,q \in A$, se tiene que $pX + qX^2 = 0$, y usando la unicidad de factorización en A, se tiene que X divide a p y que $qX = -p$, luego, $ker(X,X^2)$ es el submódulo de A^2 generado por $(-X,1)$ y como $Im(-X^2,X)$ es el submódulo de A^2 generado por $(-X^2,X)$. Como el elemento $(-X,1)$ está en el núcleo, pero no es nulo en el cociente, entonces se tiene que $H_1(\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)) \neq 0$

$H_2(\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)) = ker(-X^2,X)/0$. Nuevamente por la integridad de A se tiene que
$H_2(\mathcal{K}_\bullet(X,X^2)) = 0$

Aquí se puede observar que, como ya se dijo, la sucesión considerada en este ejemplo no es una sucesión regular y que este complejo calculado no resulta una resolución del anillo cociente A/I, ya que la homología en el lugar uno no es trivial.

Obsérvese entonces que hay alguna vinculación entre la regularidad sobre A de la sucesión coniderada y la aciclicidad del complejo extendido. (Aquí se consideró la regularidad sobre A, pero esto se puede estudiar para un módulo finitamente generado arbitrario, como se hará más adelante).

Se expondrán a continuación (sin demostración), algunos de los resultados más importantes que vinculan estos conceptos. Lamentablemente el complejo no determina si una dada sucesión es regular o no, pero determina que aun más importante: dada una sucesión $x_1, ..., x_n$, éste permite determinar la longitud de una sucesión regular maximal en el ideal $I = (x_1, ..., x_n)$.

1.4 Teorema. *Sea N un módulo finitamente generado sobre un anillo A. Supóngase que $H_j(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)) = 0$ para $j > r$, y $H_r(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)) \neq 0$, entonces toda N-sucesión maximal en $I = (x_1, ..., x_n) \subseteq A$ tiene longitud r.*

Se notará también por $\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n; N)$ al complejo $\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n) \otimes N$. (Se suele notar $\mathcal{K}^A_\bullet(x_1, ..., x_n; N)$, cuando no se sobrentiende que el el anillo de base es A).

En particular se tiene el siguiente resultado:

1.5 Corolario. *: Si $x_1, ..., x_n$ es una N-sucesión en I. Entonces el complejo extendido*

$$\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n; N):$$
$$0 \longrightarrow \bigwedge^n M \otimes N \xrightarrow{\varphi_{n-1}} ... \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^1 M \otimes N \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^0 M \otimes N \xrightarrow{\pi} A/I \otimes N \longrightarrow 0$$

resulta acíclico, es decir, el complejo de Koszul asociado a la sucesión considerada es una resolución libre del módulo $A/I \otimes N$.

Como es sabido, todo módulo libre es proyectivo, entonces el complejo $\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n; N)$ resulta una resolución proyectiva del módulo $A/I \otimes N$. De esto último, tomando homología, se obtienen los funtores derivados del funtor $\_ \otimes N$, con lo cual, resulta que:

$H_i(\mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n; N)) = Tor_i(A/I, N)$, si se sobrentiende que el el anillo de base es A, sino, más correctamente se nota:

$H_i(\mathcal{K}^A_\bullet(x_1, ..., x_n; N)) = Tor^A_i(A/I, N)$.

Además de acuerdo con los resultados anteriores se tiene que esta es la menor resolución del módulo. Y como la longitud del complejo es finita, entonces también se tiene que sólo finitas homologías pueden ser no nulas, esto nos permite asociarle al módulo $A/I \otimes N$ un valor entero no negativo que se denominará: la profundidad del módulo

1.6 Definición. Dado A un anillo, I un ideal en A y N un A-módulo. Se define la profundidad de I en N como la longitud de una (cualquiera) N-sucesión en I, y se notará por $depth(I : N)$. En el caso en que N sea simplemente el anillo A, se hablará directamente de la produndidad de I y se notará por $depth(I)$. Si $I.N = N$, de dirá que $depth(I : N) = \infty$.

Lametablemente la recíproca del corolario anterior es falsa en el caso general, aunque resulta cierta si el anillo de base es local. Más en general se tiene el siguiente resultado:

1.7 Teorema. *Sea N un módulo finitamente generado sobre un anillo local A con ideal maximal $\mathcal{M}$. Sea $x_1, ..., x_n$ una sucesión en $\mathcal{M}$. Supóngase que para algún k se tiene que $H_k(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)) = 0$, entonces se tiene que $H_k(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)) = 0$ para todo $j \geq k$.*

En particular si $H_1(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, ..., x_n)) = 0$, entonces $x_1, ..., x_n$ una sucesión N-regular en $\mathcal{M}$.

Esto permite dar para el caso local una versión más fuerte del corolario anterior

1.8 Corolario. *Dado un anillo local A con ideal maximal $\mathcal{M}$, y N un A-módulo finitamente generado . Sea $I = (x_1, ..., x_n)$ un ideal propio de A, que contiene una sucesión N-regular de longitud n. Entonces $x_1, ..., x_n$ es una sucesión N-regular.*

De aquí se deduce un resultado de importante valor geométrico, ya que éste expresa la naturaleza geométrica del concepto de profundidad anteriormente encionado.

1.9 Corolario. *Dado un anillo A y N un A-módulo finitamente generado, se tiene que si $x_1, ..., x_r$ es una sucesión N-regular, entonces $x_1^m, ..., x_r^m$ también lo es, para todo natural m.*

De lo cual se deduce que si I es un ideal de A, cuyo radical es J, entonces $depth(I : N) = depth(J : N)$

Este corolario es de índole geométrico ya que: Dado I un ideal de $A = k[X_1, ..., X_n]$, el anillo de polinomios en n variables. Sea $V = V(I)$ la variedad afín asociada a I en k^n, sea $J = I(V) = rad(I)$ el ideal de la variedad (que es radical). Queda unívocamente deterinada la profundidad de I en A como $depth(J) = depth(I(V(I))) = depth(V)$. Además, en el caso en que el ideal está dado por una A-sucesión de longitud n, entonces el complejo de Koszul es una resolución libre del anillo coordenado de la variedad $A/J = k[X_1, ..., X_n]/I(V(I))$

2 Complejos de aproximación

A continuación se definirán los *complejos de aproximación* asociados al ideal $I =< f_1, ..., f_n >$. Se verá también que frecuentemente éstos resultan resoluciones proyectivas (libres???) del álgebra simétrica y de Rees asociada a I, $Sym_A(I)$ y $R_I(A)$ respectivamente.

2.1 Definición y propiedades básicas

Sea A un anillos conmutativo y J un ideal de A generado por n elementos. Es conveniente no perder de vista el problema original, en donde $A = k[X_1, ..., X_n]$ y $J =< f_1, ..., f_n >$. Con esta notación, se tienen dos complejos de Koszul asociados:

$$\mathcal{K}_\bullet(f_1, ..., f_n; A[T_1, ..., T_n]) : ... \longrightarrow \bigwedge^1 A[T_1, ..., T_n] \xrightarrow{d_J} \bigwedge^0 A[T_1, ..., T_n]$$

que se denotará $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{J}; A[\mathbf{T}])$, y

$$\mathcal{K}_\bullet(T_1, ..., T_n; A[T_1, ..., T_n]) : ... \longrightarrow \bigwedge^1 A[T_1, ..., T_n] \xrightarrow{d_T} \bigwedge^0 A[T_1, ..., T_n]$$

que se denotará $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{T}; A[\mathbf{T}])$.

Estos dos complejos son los asociados a los morfismos

$$A[T_1, ..., T_n]^n \xrightarrow{(f_1, ..., f_n)} A[T_1, ..., T_n] : (b_1, ..., b_n) \mapsto \sum b_i f_i$$

y

$$A[T_1, ..., T_n]^n \xrightarrow{(T_1, ..., T_n)} A[T_1, ..., T_n] : (b_1, ..., b_n) \mapsto \sum b_i T_i$$

respectivamente.

Si denotamos (como antes) por d_J y d_T a los diferenciales de los correspondientes complejos, se verifica (hacer la cuentita!!!!) que

$$d_J \circ d_T + d_T \circ d_J = 0,$$

o más correctamente

$$(d_J)_i \circ (d_T)_{i-1} + (d_T)_i \circ (d_J)_{i-1} = 0.$$

En particular esto dice d_T induce un morfismo en los ciclos, en los bordes y en las homologías de $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{J}; A[\mathbf{T}])$. Esto se muestra de la siguiente forma:

Sea ω tal que $d_J(\omega) = 0$, para ver que $d_T(\omega)$ está en los ciclos de $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{J}; A[\mathbf{T}])$ basta observar que: $d_J(d_T(d_J(\omega))) = -d_T(d_J(d_J(\omega))) = -d_T(0) = 0$. Nótese también que si

ω está en los bordes, entonces $\omega = d_J(\theta)$ para agún θ. Luego $d_T(\omega) = d_T(d_J(\theta)) = -d_J(d_T(\theta)) = d_J(-d_T(\theta))$ lo cual muestra que $d_T(\omega)$ está en los bordes de $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{J}; A[\mathbf{T}])$. Y por lo tamto como ciclos van a parar a ciclos y bordes a bordes los morfismos inducidos en los primeros pasan al cociente por los segundos, es decir se inducen morfismos en las homologías.

Si denotamos por Z_i, B_i y H_i al i-ésimo ciclo, borde y homología del complejo $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{J}; A[\mathbf{T}])$ respectivamente, entonces para todo i se tiene lo anterior se resume al sisguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "\bar{d_T}"] \arrow[d, "\pi"] & Z_{i+1} \arrow[d, "\pi"] \\ H_i = \frac{Z_i}{B_i} \arrow[r, "\bar{\bar{d_T}}"] & H_{i+1} = \frac{Z_{i+1}}{B_{i+1}} \end{tikzcd}$$

Los complejos obtenidos con os ciclos,bordes y homologías, y los morfismos recién construidos se denotarán con $\mathscr{Z}^\bullet$, $\mathscr{B}^\bullet$, $\mathscr{M}^\bullet$ respectivamente.

Referencias

[Harts] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, **GMT 52,** (1977).

[Eis] D. Eisenbud, *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, **GMT 150,**(1995)

[E-H] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings.Cambridge studies in advanced mathematics.* Cambridge University Press, **39,** (1998)

[E-H] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Series in Mathematics. Addison-Wesley, (1969).

[Mats] H. Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics, **8. Cambridge Universuty Press,** (1986).