La invariancia del polinomio de Hilbert en famillias playas

- Nicolás S. Botbol - 30/06/06 -

Algunas definiciones

Definición: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, se dice íntegro si para todo abierto U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ es un anillo íntegro.

Definición: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, se dice noetheriano si existe un cubrimiento por finitos abiertos afines $\{U_i = Spec(A_i)\}$, tal que A_i es un anillo noetheriano para todo i.

Definición: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos se dice cuasi-coherente si existe un cubrimiento por abiertos afines $\{U_i = Spec(A_i)\}$ y para cada i un A_i-módulo M_i, tal que $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. $\mathcal{F}$ se dice coherente si cada M_i es finitamente generado como A_i-módulo.

Definición: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema proyectivo sobre un cuerpo k y $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente. Se define la característica de Euler de $\mathcal{F}$ como

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{F}).$$

Supongamos además que estamos en las condiciones del teorema de Serre, es decir $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio, entonces definimos

$$P(n) = \chi(\mathcal{F}(n)),$$

el polinomio de Hilbert de $\mathcal{F}$ respecto del haz $\mathcal{O}_X(1)$.

Definición: Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(T, \mathcal{O}_T)$ dos esquemas. Sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X y $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (T, \mathcal{O}_T)$ un morfismo de esquemas. $\mathcal{F}$ se dice playo en $x \in X$ si $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{T,f(x)}$-módulo playo, vía la estructura de morfismo $\mathcal{O}_{T,f(x)}$-módulo que hereda $\mathcal{O}_{X,x}$ por medio de $f^{\#}$.

$\mathcal{F}$ se dice playo sobre T si es playo (en el sentido anterior) para cada $x \in X$.

Definición: En el contexto anterior se dice que $X \to T$ es un morfismo playo (o equivalentemente que X es playo sobre T) si el haz $\mathcal{O}_X$ es playo en el sentido anterior.

Lemas y Teoremas previos

Teorema: Sea X un esquema noetheriano y separado. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos afines de X (indexado por un conjunto bien-ordenado). $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente en X. Entonces para todo $p \geq 0$ existe un isomorfismo natural $H^i(X, \mathcal{F}(m)) \simeq \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$.

Teorema: (Serre) Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, y sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X sobre *specA*. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces

(i) para todo $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado;

(ii) existe un entero n_0 (que depende de $\mathcal{F}$) tal que para todo $i > 0$ y cada n_0, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.

Lema: Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una s.e.c. de A-módulos. Si M y M'' son playos, entonces también los es M'.

Lema: Sea M un A-módulo finitamente generado, con A local y noetheriano. Entonces M es playo si y solo si es libre.

Teorema: Sea S un anillo graduado que es finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra. Sea $X := \text{Proj } S$ y $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente en X. Entonces existe un isomorfismo natural $\widetilde{\Gamma_* \mathcal{F}} \simeq F$.

Teorema: Sea S un anillo graduado que es generado por S_1 como S_0-álgebra. Sea M un S-módulo graduado. $X := \text{Proj } S$. Se define la relación de equivalencia $\approx$ en la categoría de S-módulos graduados como: $M \approx M'$ sii existe un m_0 tal que sus partes graduadas coinciden a partir de m_0.

Decimos que un módulo M es cuasi-finitamente generado si es equivalente uno finitamente generado.

Los funtores $\widetilde{(\_)}$ y $\Gamma_*(\_)$ inducen una equivalencia de categorías entre la categoría de S-módulos graduados módulo la relación $\approx$ y la categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes.

Teorema: Sea $f : X \to T$ un morfismo separado de tipo finito de esquemas noetherianos. Sea $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente en X. Sea $u : T' \to T$ un morfismo playo de esquemas noetherianos afines. Entonces existe un isomorfismo natural

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A' \simeq H^i(X', \mathcal{F}')$$

El teorema

Teorema: Sea T un esquema íntegro y noetheriano. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n_T$ un subesquema cerrado. Para cada $t \in T$, consideramos el polinomio de Hilbert, $P_t \in \mathbb{Q}[Z]$, de la fibra X_t considerado como subesquema de $\mathbb{P}^n_{k(t)}$. Entonces X es playo sobre T si y solo si P_t no depende del punto $t \in T$.

Dem: Como $X \subseteq \mathbb{P}^n_T$ es un subesquema cerrado, se puede extender el haz $\mathcal{O}_X$ como cero fuera de su soporte. Entonces podemos suponer que se tiene $X = \mathbb{P}^n_T$ y un haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X. En este contexto la fibra X_t resulta $\mathbb{P}^n_{k(t)}$ y entonces calcularemos $P_t(m) = dim_{k(t)} H^0(X_t, \mathcal{F}_t(m))$. Como el estudio en T es local, podemos suponer que $T = spec(A)$, con A un anillo íntegro y noetheriano. Y más aun, mediante un cambio de base se puede suponer que A es local.

Se tiene entonces un morfismo de X en T, donde $T = spec(A)$ con A un anillo íntegro, noetheriano y local y $X = \mathbb{P}^n_T = \mathrm{Proj}(A[x_0, ..., x_n])$. Y se tiene $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X.

Para probar lo deseado, veremos que las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{F}$ es playo sobre T;

(ii) $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ es un A-módulo libre de rango finito, para todo $m >> 0$;

(iii) El polinomio de Hilbert P_t de $\mathcal{F}_t$ en X_t es independiente de la elección de t en T.

(i)$\Rightarrow$(ii): Calculamos $H^i(X, \mathcal{F}(m))$ mediante la cohomología de Čech, usando el cubrimiento afín estandar $\mathcal{U}$ de X dado por los abiertos $U_i := D_+(x_i)$. Sabemos que

$$H^i(X, \mathcal{F}(m)) \simeq \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)).$$

Luego como $\mathcal{F}$ es playo, entonces $\mathcal{F}(U_{j_1} \cap ... \cap U_{j_p})$ es playo sobre A, y entonces $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ es playo para todo $p = 0, ..., n$.

Por otro lado, por el teorema de Serre, $H^i(X, \mathcal{F}(m)) = 0$ para $i > 0$ y $m >> 0$. Entonces el complejo de Čech resulta un resolución playa de $H^0(X, \mathcal{F}(m))$. Es decir:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}(m)) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to ... \to C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to 0$$

es una sucesión exacta de módulos playos sobre A.

A su vez, partiendo esta sucesión en sucesiones exactas cortas y sabiendo que en cada una de ellas los dos últimos mdulos son playos (procediendo inductivamente), se concluye que $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ es un A-módulo playo, y por el mismo teorema de Serre se obtiene que es finitamente generado. Finalmente como se tiene un módulo finitamente generado sobre un anillo local noetheriano, la condición de playo es equivalente a la de libre, con lo cual se tiene probado (ii).

(ii)⇒(iii): Queremos ver que $P_t(m) = dim_{k(t)} H^0(X_t, \mathcal{F}_t(m))$ es independiente de la elección de t en T. Para ello será suficiente probar para todo que $t \in T$, $P_t(m) = rg_A H^0(X, \mathcal{F}(m))$ para $m >> 0$ (ya que ésta fórmula no depende de t). Para probar esto, se mostrará que para todo $t \in T$:

$$H^0(X_t, \mathcal{F}_t(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$$

(*)

De esta forma, como $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ es un A-módulo libre de rango finito, $rg_A H^0(X, \mathcal{F}(m)) = dim_{k(t)} H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$ de lo cual se deduce que $P_t(m) = rg_A H^0(X, \mathcal{F}(m))$.

Considérese t un punto cualquiera en T y p el primo que le corresponde en A, se denota por $T' = spec(A_p)$, y t' representa el punto cerrado que le corresponde a p en la localización. Mediante un cambio de de base playo (ya que la inclusión es abierta) de T a T'

$$\begin{tikzcd} X'_{t'} \subseteq X' \arrow[r, "i'_X"] \arrow[d, "\pi'"] & X \supseteq X_t \arrow[d, "\pi"] \\ t' \in T' \arrow[r, "i'_T"] & T \ni t \end{tikzcd}$$

se tiene que:

$$H^0(X', \mathcal{F}'(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A A_p$$

(**)

Supóngase que se tiene probado el resultado (*) en la situación de la izquierda del diagrama. Entonces se tendría:

$H^0(X'_{t'}, \mathcal{F}'_{t'}(m)) \simeq H^0(X', \mathcal{F}'(m)) \otimes_{A_p} k(t')$. (*′)

Teniendo en cuenta la ecuación (*′), (**) y que $k(t') = A_p/p.A_p$ se tienen los siguientes isomorfismos:

$H^0(X'_{t'}, \mathcal{F}'_{t'}(m)) \simeq H^0(X', \mathcal{F}'(m)) \otimes_{A_p} k(t') \simeq$

$\simeq H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A A_p \otimes_{A_p} k(t') \simeq H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$

Se obtendría que:

$$H^0(X'_{t'}, \mathcal{F}'_{t'}(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$$

Entonces bastará probar (*) suponiendo que t es el punto cerrado de T.

Sea ahora t el punto cerrado de T. Como $k(t) = A/m.A$, y A es noetheriano, entonces $m = (a_1, ...a_q)$ y se tiene una presentación finita de $k(t)$ como A-módulo:

$$A^q \to A \to k(t) \to 0$$

Ahora, aplicando los funtores $\_ \otimes_A M$ y luego el funtor de hacificación $\widetilde{(\_)}$, donde $M := \Gamma_* \mathcal{F} := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{F}(m))$, se obtiene la siguiente sucesión exacta de haces sobre X:

$$\mathcal{F}^q \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_t \to 0$$

Naturalmente, como $\tilde{M} = \mathcal{F}$, $\widetilde{A \otimes_A M} = \mathcal{F}$ y $\widetilde{A^q \otimes_A M} = \tilde{M}^q = \mathcal{F}^q$, ya que $\widetilde{(\_)}$ conmuta con $\oplus$. También $\widetilde{(\_)}$ conmuta con $\otimes$. Denotando por $k(t)$ al haz constante sobre t, y como $\widetilde{k(t) \otimes_A M} = \widetilde{k(t)} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M} = k(t) \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}$, se obtiene que $k(t) \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}$ es lo que se llamaba $\mathcal{F}_t$. En el cuadrado correspondiente a tomar fibra se tiene:

$$\begin{tikzcd}
k(t) \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F} & & & \mathcal{F} \arrow[lll] \\
& X_t \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
& t \arrow[r] & T & \\
k(t) \arrow[uuu] & & & \mathcal{O}_T \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

A su vez, por un lado, como $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$, para $m >> 0$ se tiene que el funtor $H^0(X, \_ \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)))$ es exacto. Aplicándolo a la sucesión anterior se tiene:

$$H^0(X, \mathcal{F}^q(m)) \to H^0(X, \mathcal{F}(m)) \to H^0(X_t, \mathcal{F}_t(m)) \to 0$$

Por otro lado, tensorizando (sobre A) la presentación de $k(t)$ con $H^0(X,\mathcal{F}(m))$ se obtiene:

$$H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A A^q \to H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A A \to H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A k(t) \to 0$$

Y comparando ambas:

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,\mathcal{F}^q(m)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(X,\mathcal{F}(m)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(X_t,\mathcal{F}_t(m)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d, equal] \\
H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A A^q \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A A \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A k(t) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema de los 5 se tiene el siguiente isomorfismo:

$$H^0(X_t,\mathcal{F}_t(m)) \simeq H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A k(t)$$

Hemos probado que (ii) implica (iii) y por lo tanto se tiene que si $\mathcal{F}$ es playo sobre T entonces el polinomio de Hilbert P_t es independiente de la elección de t en T.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Se tiene A es un anillo íntegro local y noetheriano, con cuerpo residual k y cuerpo de fracciones K (que se corresponden con los cuerpos asociados al punto cerrado y al genérico respectivamente). Se sabe que si M es un A-módulo finitamente generado y $dim_k(M\otimes_A k) = dim_K(M\otimes_A K) = r$ entonces M es libre de rango r.

Entonces para probar que $H^0(X,\mathcal{F}(m))$ es un A-módulo libre de rango finito, para todo $m >> 0$, basta comparar su rango en el punto genrérico y en el punto cerrado. Es decir, si 0 es el genérico y t el cerrado y entonces K y k los cuerpos correspondientes, como por hipótesis $P_0(m) = P_t(m)$ para $m >> 0$ y por lo anterior

$$P_t(m) = dim_k H^0(X_t,\mathcal{F}_t(m)) = dim_k(H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A k)$$

y

$$P_0(m) = dim_K H^0(X_0,\mathcal{F}_0(m)) = dim_K(H^0(X,\mathcal{F}(m))\otimes_A K)$$

entonces se tiene lo buscado.

(ii)$\Rightarrow$(i): Sea $S = A[x_0,...,x_n]$, y M el S-módulo libre graduado

$$M = \bigoplus_{m>m_0} H^0(X,\mathcal{F}(m)),$$

donde m_0 está elegido suficientemente grande como para que $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ sea libre si $m > m_0$.

Comparando la construcción de $\Gamma_*(\mathcal{F})$ con M, vemos que coinciden en grado alto. Entonces como $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$ se tiene que $\tilde{M} = \mathcal{F}$. Y como M es libre sobre A y por lo tanto playo, entonces $\mathcal{F}$ es playo sobre T.

Estas dos últimas implicaciones demuestran que si el polinomio de Hilbert P_t es independiente de la elección de t en T, entonces $\mathcal{F}$ es playo sobre T. $\square$