Notas sobre Cohomología de Haces

Nicolás S. Botbol - FCEyN - UBA

1 Nociones de álgebra homológica

En esta primera sección examinaremos algunos conceptos básicos de álgebra homológica necesarios para poder desarrollar una teoría de cohomología para haces. Se repasarán algunas definiciones básica y los principales resutados necesarios para abordar la segunda sección. Primeramete se definirán algunos conceptos elementales de álgebra homológica como complejos de cadena, morfismos de complejos, resoluciones libres, inyectivas y proyectivas. Se definirá la cohomología de un complejo y se mencionará la noción de homotopía de complejos, funtores aditivos y exatos y alguanas nociones básicas categóricas necesaria para la buena definición de los funtores derivados y se repasarán brevemente algunas propiedades funtoriales vinculadas con los objetos definidos.

El resultado principal de este capítulo será el Teorema 1.15 que, bajo condiciones convenientes, garantiza la existencia de los funtores derivados (a izquierda), y algunas de sus propiedades fundamentales.

1.1 Complejos de cadenas y cocadenas

1.1 Definición. Sea A un anillo y sea $\{(M^i, d^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos. Se dirá que $(\mathcal{C}, d)$ es un complejo de cocadenas de A-módulos, donde

$$(\mathcal{C}, d): \qquad \dots \xrightarrow{d^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots,$$

donde $d^i \circ d^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

1.2 Observación. Si $(\mathcal{C}, d)$ es un complejo, se tiene que $d^i \circ d^{i-1} = 0$, luego $\mathrm{im}(d^{i-1}) \subseteq ker(d^i)$.

Notaremos con $(\mathcal{C}^\bullet(M), d)$ al complejo de cocadenas de A-módulos que está formado por $\{(M^i, d^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Y con $(\mathcal{C}_\bullet(M), d)$ al complejo de cadenas correspondiente.

1.3 Definición. Se define el i-ésimo grupo de la cohomología asociado al complejo $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ como: $H^i(\mathcal{C}^\bullet) = ker(d^i)/\mathrm{im}(d^{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

1.4 Definición. Un complejo $(\mathcal{C}, d)$ se dirá exacto si $\mathrm{im}(d^{i-1}) = ker(d^i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Con la notacón anterior se dirá exacto si $H^i(\mathcal{C}^\bullet) = 0$.

1.5 Nota. Análogamente (dualmente) se definen los complejos de cadenas (complejos de cocadenas en la categoría opuesta), y se dualiza la definición de cohomología.

Considerese ahora una categoría $\mathcal{D}$ (podemos suponer que se trata de la categría de módulos sobre un anillo conmutativo A), podemos considerar complejos de cadenas sobre los objetos de $\mathcal{D}$, se verá a continuación que éstos también forman una categoría, que se denominará $Comp(\mathcal{D})$, donde las flechas se definen con se explica abajo.

1.6 Definición. Sean $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ y $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$ dos complejos, sea $r \in \mathbb{Z}$. Un morfismo de complejos de $f : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$ de grado r es una sucesión de morfismos (en general de módulos) $f_i : M^i \to M'^{i+r}$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d"] & M'_{i+r} \arrow[d, "d'"] \\
M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & M'_{i+1+r}
\end{tikzcd}$$

En un diagrama más completo f_i y f_{i+1} se ilustrarían de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "d^{i-1}"] & M^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[drrr, "f_i"] & M^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[drrr, "f_{i+1}"] & \ldots \arrow[r] & M^{i+r} \arrow[r, "d^{i+r}"] & M^{i+1+r} \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "d'^{i-1}"'] & M'^i \arrow[r, "d'^i"'] & M'^{i+1} \arrow[r, "d'^{i+1}"'] & \ldots \arrow[r] & M'^{i+r} \arrow[r, "d'^{i+r}"'] & M'^{i+1+r} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

donde la condición de conmutatividad del cuadrado anterior se traduce a pedir conmutatividad en el rombo central.

De acuerdo con el abuso de notación que se comete el llamar d a la flecha d_i, también se llamará f a la flecha f_i.

Notar también que esta definición puede no tener sentido si los complejos no tienen la misma longitud.

Supóngase que se tiene dos complejos $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ y $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$, y dos morfismos de complejos $f, g : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$. Se tiene definido $H^\bullet(\mathcal{C})$ y $H^\bullet(\mathcal{C}')$. Como los morfismos f y g consisten en familias de morfismos $f_i, g_i : M^i \to M'^i$, resulta natural preguntarse preguntarse bajo qué condiciones éstos pasan al cociente lugar a lugar. Esto es, cuándo los mosfismo de complejos inducen morfimos entre las homologías y qué relación hay entre los inducidos.

Surge aquí la necesidad de definir la noción de homotopía entre morfismos de complejos.

1.7 Definición. Sean $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ y $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$ dos complejos, y dos morfismos de complejos $f, g : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$. Se dice que f y g son homotópicos (se notará $f \simeq g$) si existe una sucesión de morfismos $\{h_i\}$, donde $h_i : M^i \to M'^{i-1}$ tal que $f_i - g_i = d'^{i-1}h_i + h_{i+1}d^i$ para todo índice i.

En un diagrama, la situación se ilustra como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "d^{i-2}"] & M^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] & M^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] \arrow[dl, "h_i"] & M^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] \arrow[dl, "h_{i+1}"] & M^{i+2} \arrow[r, "d^{i+2}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+2}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+2}"] \arrow[dl, "h_{i+2}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "d'^{i-2}"'] & M'^{i-1} \arrow[r, "d'^{i-1}"'] & M'^i \arrow[r, "d'^i"'] & M'^{i+1} \arrow[r, "d'^{i+1}"'] & M'^{i+2} \arrow[r, "d'^{i+2}"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Se usará esta condición de los morfismos para probar algunos resultados que serán de gran importancia en la próxima sección.

1.8 Lema. *Sean* $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ *y* $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$ *dos complejos, y dos morfismos de complejos* $f \simeq g : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$ *(homotópicos). Entonces inducen el mismo morfismo en la homología* $H^\bullet(\mathcal{C}')$*, esto quiere decir que* $H(f_i) = H(g_i) : H^i(\mathcal{C}') \to H^i(\mathcal{C}')$.

1.9 Lema. *Sean* $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ *y* $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$ *dos complejos (como se ilustra en el diagrama)*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I'^1 \arrow[r] & I'^2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

tal que la fila superior es exacta, los I^i *son objetos inyectivos* $(i \geq 0)$ *y* φ *es un morfismo. Entonces existe un morfismo* f *de complejos, tal que en grado -1 coincide con* φ*. Y tal que si hay dos de éstos, entonces son homotópicos.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi = f_{-1}"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I'^1 \arrow[r] & I'^2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

$$f \simeq g : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d') \ .$$

Entonces inducen el mismo morfismo en la homología $H^\bullet(\mathcal{C}')$*, esto quiere decir que*

$$H(f_i) = H(g_i) : H^i(\mathcal{C}) \to H^i(\mathcal{C}').$$

1.10 Definición. Se dirá que un morfismo de complejos $f : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$ es una equivalencia homotópica si existe un morfismo $f' : (\mathcal{C}'^\bullet, d') \to (\mathcal{C}^\bullet, d)$ tal que $f'^{-1} f \simeq 1_C$ y $f^{-1} f' \simeq 1_{C'}$. En este caso se dirá que $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ y $(\mathcal{C}'^\bullet, d')$ son del mismo tipo homotópico $(\mathcal{C}^\bullet, d) \simeq (\mathcal{C}'^\bullet, d')$.

1.11 Observación/Resultado. De acuerdo a lo recién definido se tiene que:

(a) Es fácil ver que $H^i(\_)$ resulta un funtor, esto quiere decir que si se tiene $f : (\mathcal{C}^\bullet, d) \to (\mathcal{C}'^\bullet, d')$ y $g : (\mathcal{C}'^\bullet, d') \to (\mathcal{C}''^\bullet, d'')$, entonces $H^i(gf) = H^i(g) H^i(f)$, y que $H^i(Id_{\mathcal{C}^\bullet}) = Id_{H^\bullet(\mathcal{C})}$.

(b) Supongamos que en la situación del lema anterior M y M' coinciden, y que el morfismo ψ resulta la identidad, entonces dadas dos resoluciones de M, las cohomologías coinciden.

1.2 Resoluciones libres, proyectivas e inyectivas

Veremos en este parágrafo que en la categoría de módulos sobre un anillo A siempre existen resoluciones inyectivas.

Si A es un anillo, y M es un A-módulo, M puede presentarse como cociente de un A-módulo libre L_0. i.e. existe una flecha $\psi_0 : L_0 \twoheadrightarrow M$, que es un epimorfismo, entonces $M = L_0/Ker(\psi_0)$.

$$Ker(\psi_0) \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\psi_0} M$$

En general $Ker(\psi_0)$ no resulta libre, lo cual motiva escribirlo en términos de módulos libres como se hizo con M, con el objetivo de tener una escritura de M que sólo involucre módulos libres. Se tiene entonces $\psi_1 : L_1 \twoheadrightarrow Ker(\psi_0)$. Se tiene

$$\begin{tikzcd} Ker(\psi_0) \arrow[r] & L_0 \arrow[r, two heads, "\psi_0"] & M . \\ L_1 \arrow[u, two heads, "\psi_1"] \arrow[ur, "\varphi_1"] & & \end{tikzcd}$$

Anógamente existe un módulo libre L_2 y $\psi_2 : L_2 \twoheadrightarrow Ker(\varphi_1)$ y se define $\varphi_1 : L_2 \to L_1$. Se obtendrá de esta manera una sucesión

$$\mathcal{L} : \qquad \ldots \xrightarrow{\varphi_{i+2}} L_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} L_i \xrightarrow{\varphi_i} \ldots \xrightarrow{\varphi_2} L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 (\xrightarrow{\psi_0} M \xrightarrow{0} 0).$$

En lo sucesivo no se escribirá el último par de flechas.

En este caso (cuando los L_i son libres) se dice que se tiene una resolución libre del módulo M. En el caso en que los L_i sean solamente proyectivos se dirá que se tiene una resolución proyectiva de M.

También es posible construir una resolución, donde las flechas vayan en sentido contrario.

$$\mathcal{I} : \qquad 0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\psi_0} I_0 \xrightarrow{\varphi_0} I_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_{i-2}} I_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} I_i \xrightarrow{\varphi_i} \ldots .$$

En el caso en que los I^i son inyectivos se dirá que se tiene una resolución inyectiva de M.

Se comentó en la sección anterior que si se tienen dos resoluciones proyectivas o inyectivas de un objeto M

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} : & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \ldots . \\ \mathcal{I}' : & 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I'^1 \arrow[r] & I'^2 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Y φ es un morfismo. Entonces existe un morfismo f de complejos, tal que en grado -1 coincide con φ. Y tal que si hay dos de éstos, entonces son homotópicos. Resulta que en el caso de resoluciones, como se tiene el morfismo 0 en grado -2 y el morfismo identidad en grado -1, se puede levantar $\varphi = Id_M$ a un morfismo $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ y $f' : \mathcal{I}' \to \mathcal{I}$. Además, como el primer cuadrado conmuta, $f'f, Id_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ son dos morfismos de complejos que resultan homotópicos, esto da una homotopía entre $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}: \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi=Id_M"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \dots \\
\mathcal{I}': & 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I'^1 \arrow[r] & I'^2 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}'$. Entonces inducen el mismo morfismo en la cohomología. Se verá más adelante qué sucede si se le aplica un funtor F a una resolución, y se definirá como el *i-ésimo funtor derivado de* F a la i-ésima homología del complejo que se obtiene al aplicar el funtor F, esto permite mdir cuán "inexacto" es el funtor F.

1.3 Funtores derivados

En lo que sigue se asumirá que se trabaja en categorías abelianas (en general será conveniente pensar que se trata de la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo), esto es:

1.12 Definición. Una categoría $\mathcal{A}$ se dice *abeliana* si: dados A y B objetos de $\mathcal{A}$, $Hom(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y la ley de composición es lineal, hay suma directa, núcleo y conúcleo y todo morfismo se factoriza como un un epimorfismo segido de un monomorfismo.

1.13 Definiciones. Sean $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}$ son dos categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor (covariante), se dice:

(a) *aditivo* si dados $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ dos morfismos en $\mathcal{A}$ de A_1 en A_2, $F(f + g) = F(f) + F(g) \in Hom_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2))$ y si F preserva identidades, en resumen, se pide que F sea un morfismo de grupos abelianos;

(b) *exacto a izquierda* si es aditivo y si dada una sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M''$, la sucesión $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ resulta exacta;

(c) *exacto a derecha* si es aditivo y si dada una sucesión exacta $M' \to M \to M'' \to 0$, la sucesión $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ resulta exacta.

1.14 Definición. Dado un objeto M, sea $\mathcal{I} : 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$ una resolución inyectiva de M. Se define el q-ésimo funtor derivado a derecha de F, que se nota R^qF, como

$$R^qF(M) = H^q(F(I)).$$

Esto dice que el q-ésimo funtor derivado a derecha de F, es la q-ésima homología del complejo

$$0 \to F(I^0) \to F(I^1) \to F(I^2) \to \dots .$$

Según lo visto en las secciones anteriores, estos funtores están bien definidos, ya que no dependen de la resolución tomada.

Supongamos que se tienen dos resoluciones inyectivas de un objeto M, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ (que como se vió, resultan homotópicas)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}: \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[r] & (M \arrow[r] \arrow[d, "Id"] &)I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \\
\mathcal{I}': & 0 \arrow[r] & (M \arrow[r] &)I'^0 \arrow[r] & I'^1 \arrow[r] & I'^2 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Como $F\mathcal{I} \simeq F\mathcal{I}'$. Entonces la homología $H^i(F\mathcal{I})$ resulta naturalmente isomorfa la homología $H^i(F\mathcal{I}')$. Esto dice que $R^qF(M) = H^q(F(I)) = H^q(F(I'))$, con lo cual se tiene la buena definición, tal como se quería.

Se enunciarán a continuación algunas propiedades de los funtores derivados. Lo haremos solamente para el caso en F sea un funtor covariante exacto a izquierda, pero los otros tres casos son idénticos y se obtienen dualizando.

1.15 Teorema. *Sean $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}$ son dos categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor covariante exacto a izquierda. Entonces:*

(a) Para cada $i \geq 0$ se tiene R^iF, el i-ésimo funtor derivado a derecha de F. Este funtor resulta aditivo y es independiente de la resolución inyectiva elegida, módulo isomorfismos naturales de funtores;

(b) existe un isomorfismo natural $F \simeq R^0F$;

(c) para cada sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$, $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ y para cada i se tiene un morfismo natural (llamado morfismo de conexión) $\delta^i : R^iF(M'') \to R^{i+1}F(M')$ y una sucesión exacta larga

$$\dots \to R^iF(M') \to R^iF(M) \to R^iF(M'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(M') \to R^{i+1}F(M) \to \dots \ ;$$

(d) si I es un objeto inyectivo en $\mathcal{A}$, entonces $R^iF(I) = 0$ para todo $i > 0$;

(e) si $\{J^k\}_k$ es una familia de objetos acíclicos para el funtor F, es decir, si $\mathcal{J} : 0 \to M \to J^0 \to J^1 \to J^2 \to \dots$ es exacta, $R^iF(J^k) = 0$ para todo $i > 0$ y todo k; entonces para todo i, existe un isomorfismo natural $R^iF(M) \simeq H^i(\mathcal{J}^\bullet)$.

2 Cohomología de haces

Desarrollaremos aquí una teoría de cohomología para haces de grupos abelianos sobre espacios topológicos. Primero recordaremos algunas definiciones y repasaremos las propiedades necesarias para desarrollar la teoría que nos convoca. Luego aplicaremos la teoría repasada en la sección anterior en este contexto, obteniendo así una teoría de cohomología para haces de grupos abelianos sobre espacios topológicos como también para haces de anillos sobre espacios anillados, es decir, pares $(X, \mathcal{O})$, donde X es un espacio topológico, y $\mathcal{O}$ un haz de anillos sobre X.

Hay esencialmente tres posibles acercamiento a la teoría de cohomología a coeficientes en haces, el primero (también históricamente) corresponde a Serre, quien definió los grupos de cohomología a coeficientes en un haz dado, mediante los grupos de cohomología de Čech para ese haz. El segundo enfoque, que es el que adoptaremos, es la definición de estos grupos a través de los funtores derivados del funtor de secciones globales, este enfoque es el más general y corresponde a Grothendieck. Finalmente, el tercer enfoque debido a Godement, con el que mecharemos de vez en cuando, consiste en la definición de estos grupos como los grupos de cohomología de una resolución flasque.

La ventaja del primer enfoque es que este es prácticamente el único que resulta implementable en los cálculos, sin embargo el segundo enfoque es un poco más general y es el que se desarrolla en el EGA III primera y segunga parte.

2.1 Sobre la categoría de haces

Para comenzar repasaremos brevemente la definición de haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Definiremos morfismos de haces, y con esto tendremos una categoría que tiene como objetos a los haces de grupos abelianos sobre X que notaremos como $\mathscr{A}b(X)$.

2.1 Definición. Sea X un espacio topológico, un prehaz $\mathscr{P}$ sobre X es un funtor contravariante de la categoría de abiertos de X con las inclusiones, que denotaremos $Top(X)$, a la categoría de grupos abelianos. Se tiene entonces que:

(a) $\mathscr{P}(\emptyset) = 0$;

(b) si U es un abierto de X, y ρ denota la restricción, entonces $\rho|_{U,U}$ es la identidad de $\mathscr{P}(U)$;

(c) si $U \subset V \subset W$ son abiertos de X, entonces $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$.

2.2 Definición. Diremos que $\mathscr{F}$ es un haz sobre X si es un prehaz que además verifica que:

(a) si U es un abierto de X, $\{V_i\}$ es un cubrimiento por abiertos de U y toda sección de $\mathscr{F}$ en U $s \in \mathscr{F}(U)$, verifica que $\rho_{U,V_i}(s) = 0$ para todo i, entonces $s = 0$;

(b) si U es un abierto de X, $\{V_i\}$ es un cubrimiento por abiertos de U y se tiene secciones $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ tales que conciden en las intersecciones, entonces existe una sección global que extiende a todas las s_i.

2.3 Definición. Supongamos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos prehaces en X, un morfismo de prehaces (la misma cosa para haces) consiste en una familia de morfismos de grupos abelianos $\{\varphi_U\}$, uno para cada abierto U de X, donde $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es tal que si $V \subset U$ son dos abiertos de X, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{U,V}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

Repasaremos a continuación una construcción de gran utilidad en geometría algebraica, que permite comprender la naturaleza local de estos objetos.

2.4 Definición. Si $\mathscr{F}$ es un prehaz en X, y $p \in X$ es un punto, definimos el *stalk* $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ en p, que muchas veces también se denomina *gérmenes de* $\mathscr{F}$ *en* p, como el colímite filtrante de grupos $\mathscr{F}(U)$, sobre el filtro de entornos de p. Es decir, $\mathscr{F}_p := \varinjlim \mathscr{F}(U)$

Obsérvese que vía el funtor $\varinjlim(\_)$, cada morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en X induce un morfismo en los stalks, $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$, para cada $p \in X$.

Respecto de los gérmenes, los siguientes resultados son válidos y serán necesarios en lo que resta de las notas.

2.5 Lema. *Sea X un espacio topológico y $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces sobre X. Entonces:*

(a) φ es un isomorfismo si y solo si φ_p lo es para cada $p \in X$;

(b) $(\ker \varphi)_p = \ker(\varphi_p)$ e $(\mathrm{im}\varphi)_p = \mathrm{im}(\varphi_p)$;

(c) φ es un inyectiva si y solo si φ_p lo es para cada $p \in X$;

(d) si $\ldots \to \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathscr{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \ldots$ es exacta si y solo si la correspondiente scesión en los stalks lo es.

Recordemos que tener un morfismo de (pre)haces es tener una familia de morfismos de grupos abelianos $\{\varphi_U\}_{U \in Top(X)}$, tales que $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$. Para cuando se trata de haces, una notación un poco más sugestiva para lo anterior sería la siguiente. Dado $\mathscr{F}$ un haz de grupos sobre un espacio topológico X, y U un abierto de X, $\mathscr{F}(U)$ denota todas las secciones definidas sobre todo U, también se escribe $\Gamma(U, \mathscr{F})$. Naturalmente $\Gamma(X, \mathscr{F})$ denotará el grupo de secciones globales, es decir, definidas en todo X. Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces, escribiremos a veces $\Gamma(U, \varphi)$ al referirnos al morfismo φ_U.

La razón por la que decimos que esta notación es más sugestiva es que si se tiene un mosfismo de haces como el anterior, este induce para cada abierto U un morfismo de grupos $\Gamma(U,\varphi):\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{G})$, $\Gamma(U,\_\,)$ resultará un funtor de la categoría de haces de grupos abelianos sobre U, $\mathscr{A}b(U)$, en la categoría de grupos abelianos Ab.

En la categoría de prehaces también existe el prehaz núcleo, prehaz conúcleo, prehaz imagen y existe la noción de subprehaz. El caso del prehaz imagen y conúcleo es un poco más delicado, en los demás casos, si se trata de un morfismo de haces, los núcleos y subhaces resultan también haces, sin embargo el prehaz conúcleo e imagen de un morfismo de haces puede no resultar haz. En este tipo de situaciones, el "problema" se remedia mediante un método que no explicaremos, conocido como hacificación o "contrucción ++", que a cada prehaz le asigna un haz determinado. Todas estos objetos, núcleo, conúcleo, suprehaz, imagen, etc. se definen de forma tal que para cada abierto U, a través del funtor $\Gamma(U,\_\,)$ resulten el objeto correspondiente en la categoría Ab. Para el caso de un subhaz $\mathscr{G}$ de un haz $\mathscr{F}$ se pedirá también que las restricciones de $\mathscr{G}$ sean las inducidas por las de $\mathscr{F}$.

2.2 El funtor $\Gamma(X,\_\,)$

Pasemos ahora a ver algunas propiedades funtoriales del funtor de secciones globales $\Gamma(X,\_\,)$. Por definición, si $\mathscr{F}$ es un haz, para cada abierto U, $\Gamma(U,\mathscr{F})$ es un grupo abeliano, aquel formado por las secciones de $\mathscr{F}$ definidas en todo U, en particular $\Gamma(X,\mathscr{F})$ es un grupo abeliano. Vimos recién que si $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ es un mosfismo de haces de grupos abelianos, este induce para cada abierto U un morfismo de grupos $\Gamma(U,\varphi):\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{G})$, claramente, esto también vale tomando $U=X$. Entonces tenemos una asignación de objetos de $\mathscr{A}b(X)$ en objetos de Ab y dado dos objetos de $\mathscr{A}b(X)$, para cada flecha φ entre ellos se obtiene una flecha $\Gamma(X,\varphi)=\varphi_X$ entre las correspondientes imágenes en Ab. Es fácil ver que dados tres haces y mofismos entre ellos $\mathscr{F}'\overset{\varphi}{\to}\mathscr{F}\overset{\psi}{\to}\mathscr{F}''$ se tiene $\Gamma(X,\mathscr{F}')\overset{\Gamma(X,\varphi)}{\to}\Gamma(X,\mathscr{F})\overset{\Gamma(X,\psi)}{\to}\Gamma(X,\mathscr{F}'')$ y la flecha identidad para un haz $\mathscr{F}$ se aplica en la identidad de $\Gamma(X,\mathscr{F})$. Esto prueba que $\Gamma(X,\_\,)$ es un funtor covariante (preserva el sentido de las flechas) de $\mathscr{A}b(X)$ en Ab.

Más aún, como la categoría de haces sobre un espacio topológico es una categoría abeliana (hay núcleos, conúcles, etc.) (ver definición 1.12) resulta natural preguntarse si este funtor es aditivo (1.13(a)). "Afortunadamente" la respuesta es que sí lo es. Incluso más, $\Gamma(X,\_\,)$ resutará exacto a izquierda (ver definición 1.13(b)), probaremos ahora este resultado, que será clave en nuestro tema de estudio.

2.6 Proposición. *Sea*

$$0\to\mathscr{F}'\overset{\varphi}{\to}\mathscr{F}\overset{\psi}{\to}\mathscr{F}''$$

una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Para cada abierto U de X, la sucesión

$$0\to\Gamma(U,\mathscr{F}')\overset{\varphi_U}{\to}\Gamma(U,\mathscr{F})\overset{\psi_U}{\to}\Gamma(U,\mathscr{F}'')$$

resulta exacta.

Demostración. Por la funtorialidad de $\Gamma(U, \_\,)$ se tiene una sucesión como la escrita, que resulta un complejo, lo que falta probar es la exactitud en los dos lugares.

En primer lugar, recordemos que $\ker(\varphi)$ es un haz tal que para cada abierto U de X, $(\ker(\varphi))(U) = \{s \in \mathscr{F}'(U)$ tales que $\varphi_U(s) = 0\}$. La inyectividad de φ implica que $(\ker(\varphi))(U) = 0$ para todo $U \subset X$, luego si $s \in (\ker(\varphi))(U)$, entonces $s = 0$. Hemos probado entonces la exactitud en el primer lugar.

Veamos ahora que $\mathrm{im}(\varphi_U) = \ker(\psi_U)$. Sea $t \in \ker(\psi_U)$, es decir, $t \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\psi_U(t) = 0$. Dado un punto $x \in U$, como $\mathrm{im}(\varphi_x) = \ker(\psi_x)$ por la exactitud de la sucesión de los gérmenes del Lema 2.5 (d), existe un elemento $s_x \in \mathscr{F}'_x$ tal que $\varphi_x(s_x) = t_x$, que resulta único por la inyectividad de φ_x (que proviene de la de φ). Sea V un entorno abierto de x, y sea $s_V \in \mathscr{F}'(V)$ tal que su germen en x resulte s_x. Por la exactitud recién mencionada existe W, entorno de x, tal que $x \in W \subset V$ y $(\rho|_{V,W} \circ \varphi_V)(s_V) = \rho|_{V,W}(t)$. Entonces existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_i$ de U y secciones $s_i \in \mathscr{F}$ tales que $\varphi_{U_i}(s_i) = \rho|_{U,U_i}(t)$. Como φ_{U_i} es inyectiva, los s_i están unívocamente determinados. Si llamamos $U_{i,j}$ a $U_i \cap U_j$, y supongamos que $U_{i,j} \neq \emptyset$, entonces $\varphi_{U_{i,j}}$ también es inyectiva. Se tiene entonces que $\rho_{U_i,U_{i,j}}(s_i) = \rho_{U_j,U_{i,j}}(s_j)$. Luego por la propiedad 2.2 (b) existe una sección $s \in \mathscr{F}'(U)$ tal que $\rho_{U,U_i}(s) = s_i$, y entonces $\varphi_U(s) = t$. Con lo cual se prueba que $\mathrm{im}(\varphi_U) \supset \ker(\psi_U)$. la otra inclusión es clara, ya que por la exactitud de la sucesión de haces $\psi \circ \varphi = 0$, entonces como $\Gamma(U, \_\,)$ es funtor, se tiene que $\psi_U \circ \varphi_U = 0$, y entonces $\mathrm{im}(\varphi_U) \subset \ker(\psi_U)$. Se tiene entonces que la sucesión resulta exacta.

$\square$

2.7 Nota. En general ψ_U no resulta suryectiva.

Ahora, de acuerdo con el teorema 1.15 tenemos definidos los funtores derivados de $\Gamma(X, \_\,)$, estos resultarán los funtores de cohomología buscados $H^i(X, \_\,)$. No se hace, ni se hará en este texto referencia a δ-funtores universales, pero para el lector entendido, queda como ejercicio verificar que para todo i, $H^i(X, \_\,)$ es de este tipo.

2.3 Cohomología a coeficientes en haces

Desarrollaremos aquí la teoría de cohomología de haces, tomando los funtores derivados del funtor de secciones globales $\Gamma(X, \_\,)$. Se puede probar que bajo ciertas hipótesis los grupos de cohomología aquí definidos coinciden con los grupos de cohomología de Čech que se definen a partir de un cubrimiento por abiertos de X, permitiendo esto hacer efectivo el cálculo de cohomología en ejemplos concretos.

En lo que sigue, aceptaremos sin demostración que:

2.8 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio anillado. La categoría de haces de $\mathcal{O}$-módulos sobre el espacio anillado $(X, \mathcal{O})$, que denotaremos por $\mathscr{M}od(X)$ tiene suficientes objetos inyectivos (es decir, todo haz $\mathscr{F}$ admite una resolución inyectiva).*

2.9 Corolario. *Si X es un espacio topológico, entonces la categoría de haces de grupos abelianos en X, es decir de $\mathbb{Z}^{\sim}$-módulos que denotaremos por $\mathscr{A}b(X)$, tiene suficientes inyectivos.*

Antes de adentrarnos en los detalles más sutiles que involucra el trato con haces, definiremos aquí mismo los grupos de cohomologías a coeficientes en un haz $\mathscr{F}$ dado sobre un espacio topológico X.

2.10 Definición. Sea X un espacio topológico, y sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Como a categoría de haces de grupos abelianos $\mathscr{A}b(X)$ y la de grupos abelianos Ab son categorías abelianas, y $\Gamma(X, \_\ ) : \mathscr{A}b(X) \to Ab$ es un funtor covariante exacto a izquierda; de acuerdo con el teorema 1.15 tenemos definidos sus funtores derivados a derecha. Entonces definimos:

$$H^i(X, \_\ ) = R^i(\Gamma(X, \_\ )).$$

Se dirá que $H^i(X, \mathscr{F})$ son los grupos de cohomología de $\mathscr{F}$.

Obsérvese que hasta este momento no hemos usado ninguna propiedad extra del espacio X, más que la existencia de una topología, y ninguna propiedad de $\mathscr{F}$ más allá de su condición de haz de grupos abelianos sobre X.

Como hemos mencionado antes, el cálculo de estos funtores derivados involucra computar una resolución inyectiva del haz en cuestión. Esta tarea suele ser suficientemente inimplementable como para que se busquen caminos alternativos. En este punto es donde nos separamos por primera vez de la teoría general. Aunque nuestra definición no parece ser la más adecuada para efectuar cálculos vendría bien entender quienes son los objetos inyectivos en esta categoría. Al menos, como esto puede resultar difícil, veremos que existe una familia suficientemente buena de haces que llamatemos *haces flasque* (blando o en inglés flabby), que nos permitirán calcular los grupos de cohomologías.

2.11 Definición. Un haz $\mathscr{I}$ sobre un espacio topológico X se dirá *flasque* si cada sección de $\mathscr{I}$ sobre un abierto U de X puede ser extendida a una sección global. En términos más algebraicos, esto dice que la restricción $\rho|_{U,X} : \mathscr{I}(X) \to \mathscr{I}(U)$ es suryectiva.

Las razones por las cuales los haces *flasque* son importantes son varias y se enuncian sin demostración en la siguiente proposición:

2.12 Proposición.

(a) En el contexto anterior, donde $(X, \mathcal{O})$ es un espacio anillado, los haces de $\mathcal{O}$-módulos inyectivos resultan flasque, en particalar, tomando $\mathcal{O} = \mathbb{Z}^\sim$ se tiene que todo haz de grupos abelianos que es inyectivo es flasque;

(b) si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ es una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X, y suponamos que el haz $\mathscr{F}'$ es flasque. Entonces para cada abierto U de X, se tiene la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to \Gamma(U, \mathscr{F}') \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}'') \to 0;$$

(c) si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ es una sucesión exacta de haces de grupos abelianos, y $\mathscr{F}'$ y $\mathscr{F}$ son flasque, entonces $\mathscr{F}''$ también lo es;

(d) si $f : X \to Y$ es una función continua entre dos espacios topológicos. Si $\mathscr{F}$ es un haz flasque en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz flasque en Y;

(e) todo haz constante es flasque

Como hemos visto recién los objetos inyectivos (haces de $\mathcal{O}$-módulos inyectivos) resultan flasque, vimos también que en nuestro contexto hay suficientes objetos inyectivos. Luego, dado un haz $\mathscr{F}$ de grupos abelianos, siempre podemos generar una *resolución flasque*, esto es, una resolución de $\mathscr{F}$ con haces de este tipo.

Supongamos que se tiene $\mathscr{I}$ un haz flasque sobre un espacio topológico, como hay suficientes objetos inyectivos, podemos "incluir" $\mathscr{I}$ dentro de un objeto inyectivo $\mathscr{J}$ de la categoría de haces de grupos abelianos, y denominando con $\mathscr{Q}$ al cociente, se tiene que

$$0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{J} \to \mathscr{Q} \to 0$$

es una sucesión exacta de haces. Ahora, como $\mathscr{I}$ es flasque, se tiene que

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{I}) \to \Gamma(X, \mathscr{J}) \to \Gamma(X, \mathscr{Q}) \to 0.$$

A su vez, de acuerdo con el teorema 1.15 (a), se tienen los ya definidos grupos de cohomologías, y por 1.15 (c) a partir de $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{J} \to \mathscr{Q} \to 0$ se obtiene una sucesión exacta larga en las cohomologías

$$0 \to H^0(X, \mathscr{I}) \to H^0(X, \mathscr{J}) \to H^0(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathscr{I}) \to H^1(X, \mathscr{J}) \to \dots$$

$$\dots \to H^{n-1}(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} H^n(X, \mathscr{I}) \to H^n(X, \mathscr{J}) \to H^n(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

como $\mathscr{J}$ es un objeto inyectivo, por 1.15 (d) se tiene que $H^i(X, \mathscr{J}) = 0$ para todo $i > 0$. A patir de la sucesión exacta larga obtenida

$$0 \to H^0(X, \mathscr{I}) \to H^0(X, \mathscr{J}) \to H^0(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathscr{I}) \to 0 \to \dots$$

$$\dots \to 0 \to H^{n-1}(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} H^n(X, \mathscr{I}) \to 0 \to H^n(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

tenemos que el morfismo de conexión da un isomorfismo $\partial : H^{i-1}(X, \mathscr{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathscr{I})$, para todo $i > 1$. Como $\mathscr{I}$ es flasque, por lo observado en 2.12(b), se tiene que el principio de la sucesión exacta larga da lugar a una sucesión exacta corta de las secciones globales, y por lo tanto $H^1(X, \mathscr{I}) = 0$. Como este procedimiento se puede hacer para todo haz flasque, a partir de 2.12 (a) $\mathscr{J}$ resulta flasque y por 2.12(c) junto con que $\mathscr{I}$ es flasque se tiene que $\mathscr{Q}$ también lo es. Luego también tenemos que $H^1(X, \mathscr{Q}) = 0$. Luego por inducción se tiene el resultado buscado.

2.13 Nota. Este razonamiento nos dice que los haces flasque resultan acíclicos para el funtor $\Gamma(X, \_\,)$.

Como corolario de 1.15 (e) se tiene en el siguiente resultado:

2.14 Proposición. *Sea X un espacio topológico, y $\mathscr{F}$ un haz flasque sobre X. Entonces*

(a) $H^0(X, \mathscr{F}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{F})$;

(b) $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ *para todo* $i > 0$.

A partir de acá el camino a recorrer debería resultar estandar, ya sabemos que dado un haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ podemos encontrar una resolución flasque del tipo:

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^0 \to \mathscr{I}^1 \to \mathscr{I}^2 \to \dots,$$

para la cual el funtor $\Gamma(X, \_\,)$ resulta acíclico. Ahora podremos calcular los grupos de cohomología tomando resoluciones flasque. Como indica el siguiente teorema:

2.15 Teorema. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos. Podemos considerar una resolución flasque $\mathscr{I}^\bullet$ de $\mathscr{F}$*

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^0 \to \mathscr{I}^1 \to \mathscr{I}^2 \to \dots,$$

y luego aplicando el funtor de secciones globales se tiene que

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{I}^0) \to \Gamma(X, \mathscr{I}^1) \to \Gamma(X, \mathscr{I}^2) \to \dots.$$

Entonces los grupos de cohomología de haces antes definidos coinciden con $H^i(X, \mathscr{F})$ calculados como los grupos cohomología del complejo anterior.

Demostración. Consideremos $\Gamma(X, \_\,) : \mathscr{A}b(X) \to Ab$ el funtor de secciones globales de haces de grupos abelianos o bien pensado como funtor de haces de $\mathcal{O}$-módulos, como los haces flasque resultan acíclicos para este funtor, por el teorema 1.15 (e) para cada i se tiene un isomorfismo natural entre los grupos de cohomología $H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(\mathscr{I}^\bullet)$. $\square$

2.4 Algunos resultados técnicos

2.16 Definición. Sea X un espacio topológico, $U \subset X$ un subespacio abierto de X. Sea $\mathscr{F}$ un haz definido en el abierto U. Denotemos por $i_!\mathscr{F}$, al haz en X asociado al prehaz que aplica $V \mapsto \mathscr{F}(V)$ si $V \subset U$ y 0 si no (es decir si $V \cap U \neq \emptyset$).

2.17 Lema. *Sea X un espacio topológico, $Z \subset X$ un subespacio cerrado, $j : Z \to X$ el morfismo de inclusión y $U = X - Z$ el abierto complementario, provisto de su inclusión $i : U \to X$.*

(a) Sea $\mathscr{F}$ un haz en Z. Entonces los gérmenes $(j_*\mathscr{F})_p$ en X resultan $\mathscr{F}_p$ si $p \in Z$ y 0 en caso contrario. Luego, $j_*\mathscr{F}$ consiste en el haz que extiende por cero a $\mathscr{F}$ fuera de Z.

(b) *Sea* $i_!\mathscr{F}$ *como en 2.16. Entonces, el stalk* $(i_!\mathscr{F})_p$ *coincide con* $\mathscr{F}_p$ *si* $p \in U$ *y es nulo si* $p \notin U$*. Más aún,* $i_!\mathscr{F}$ *es el único haz que tiene esta propiedad, y cuya restricción a* U *coincide con* $\mathscr{F}$*. Luego,* $i_!\mathscr{F}$ *consiste en el haz que extiende por cero a* $\mathscr{F}$ *fuera de* U*.*

(c) *Sea* $\mathscr{F}$ *un haz en* X*,* $\mathscr{F}|_U$ *y* $\mathscr{F}|_Z$ *las correspondientes restricciones. Entonces existe una sucesión exacta de haces sobre* X *de la forma:*

$$0 \to i_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

2.18 Lema. *Sea* X *un espacio topológico noetheriano y* $\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *un sistema dirigido de haces abelianos (por ejemplo de haces de grupos abelianos). Entonces para cada* $i \geq 0$*, los funtores* $\varinjlim(\_)$ *y* $H^i(X, \_)$ *conmutan, es decir, existen isomorfismos naturales*

$$\varinjlim H^i(X, \mathscr{F}_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim \mathscr{F}_\lambda)\ .$$

2.19 Corolario. *El funtor de cohomología conmuta con sumas directas infinitas.*

2.20 Lema. *Sea* X *un espacio topológico,* $Z \subset X$ *un subespacio cerrado con* $j : Z \to X$ *el morfismo de inclusión y* $\mathscr{F}$ *un haz de grupos abelianos sobre* Z*. Entonces para cada* $i \geq 0$*,*

$$H^i(Z, \mathscr{F}) = H^i(X, j_*\mathscr{F}).$$

Demostración. Sea $\mathscr{I}^\bullet$ una resolución flasque de $\mathscr{F}$ en Y, entonces por la exactitud de j_* y 2.12(d) se tiene que $j_*\mathscr{I}^\bullet$ es una resolución flasque de $j_*\mathscr{F}$ en X. Además, para cada i, $\Gamma(Y, \mathscr{I}^i) = \Gamma(X, j_*\mathscr{I}^i)$, y por lo tanto los grupos de cohomología coinciden.

□

2.5 Una aplicación: *El teorema de Anulación de Grothendieck*

En esta sección veremos una aplicación de la teoría introducida. El teorema que vamos a presentar fue enunciado por Grothendieck, y probado por Serre para haces coherentes sobre curvas algebraicas y variedades algebraicas proyectivas y luego fue generalizado. Este resultado enuncia en el contexto de haces y espacios topológicos una versión similar a un teorema que afirma que los grupos de homología singular en una variedad diferenciable real de dimensión n se anulan para $i > n$.

2.21 Teorema (Teorema de anulación, Grothendieck)**.** *Sea* X *un espacio topológico noetheriano de dimensión* n*. Entonces para todo* $i > n$ *y para todo haz de grupos abelianos* $\mathscr{F}$ *en* X*, se tiene que* $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$*.*

2.22 Notación. Antes de probar el teorema, estableceremos la siguiente notación.

(a) Si Z es un subespacio cerrado de X dotado de la inclusión $j : Z \to X$, entonces para cada haz $\mathscr{F}$ en X escribimos $\mathscr{F}_Z = j_*(\mathscr{F}|_Z)$.

(b) Si U es un abierto de X, e $i : U \to X$ es la inclusión, notaremos $\mathscr{F}_U = j_!(\mathscr{F}|_U)$.

En particular, por el Lema 2.17(c), se tiene una sucesión exacta de haces sobre X de la forma

$$0 \to \mathscr{F}_U \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_Z \to 0.$$

Demostración del Teorema 2.21. Probaremos el teorema por inducción en n, en varios pasos:

Paso 1. Primero, veremos que podemos llevar el problema al caso en que X es irreducible. Para probar esto, supongamos que X es reducible, sea Z una de sus componentes irreducibles (por lo tanto Z es cerrado), y $U = X - Z$ el complemento. Entonces para cada haz $\mathscr{F}$, por el lema 2.17(c), se tiene una sucesión exacta $0 \to \mathscr{F}_U \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_Z \to 0$.

A partir de esta sucesión exacta corta, de acuerdo al Teorema 1.15, construimos la sucesión exacta larga de cohomologías:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}_U) \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}_Z) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathscr{F}_U) \to H^1(X, \mathscr{F}) \to \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^i(X, \mathscr{F}_U) \to H^i(X, \mathscr{F}) \to H^i(X, \mathscr{F}_Z) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(X, \mathscr{F}_U) \to \dots \ .$$

Bastará probar que $H^i(X, \mathscr{F}_Z) = 0$ y que $H^i(X, \mathscr{F}_U) = 0$, para $i > n$. Z es cerrado e irreducible y, de acuerdo con 2.17(b), $\mathscr{F}_U$ puede pensarse como un haz sobre el cerrado $\bar{U}$, que tiene una componente irreducible menos que X. Notar que es aquí donde se usa la noetherianidad de X. Usando el Lema 2.20, podemos identificar $H^i(Z, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{F}_Z)$, y procediendo por inducción en la cantidad de componentes irreducibles de X, reducimos el problema a demostrar el teorema para X irreducible.

Paso 2. Supongamos que X es irreducible de dimensión cero, entonces los únicos abiertos de X son: X mismo y el conjunto vacío (de haber un abierto propio no vacío, el complemento sería un cerrado propio, no vacío e irreducible, lo cual es absurdo). Entonces $\Gamma(X, \_\ )$ induce una equivalencia entre las categorías $\mathscr{A}b(X)$ y Ab, asignando a cada $\mathscr{F} \in \mathscr{A}b(X)$ el grupo $\mathscr{F}(X)$, y de la misma forma con las flechas. La inversa le asigna a cada $G \in Ab$ el haz $\mathscr{F}$ definido como $\mathscr{F}(X) = G$ y $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$ y las flechas se definen como la misma flecha que en grupos en un caso y el morfismo constante cero en el otro. Como $\Gamma(X, \_\ )$ es una equivalencia en particular es exacto y por definición se tiene que $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $\mathscr{F} \in \mathscr{A}b(X)$ y para todo $i > 0$.

Paso 3. Supongamos ahora que X es irreducible de dimensión n, y sea $\mathscr{F} \in \mathscr{A}b(X)$. Consideremos el siguiente conjunto $\mathscr{C} = \bigcup_{U \subset X} \mathscr{F}(U)$ y sea Ω el conjunto de partes finitas de $\mathscr{C}$. Para cada $\omega \in \Omega$ (ω es un subconjunto finito de $\mathscr{C}$), sea $\mathscr{F}_\omega$ el subhaz de $\mathscr{F}$ generado por las secciones en ω, sobre cualquier abierto. Claramente Ω es un conjunto dirigido por la inclusión y $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_\omega$.

Por el Lema 2.18 tenemos que $\varinjlim H^i(X,\mathscr{F}_\omega)=H^i(X,\varinjlim \mathscr{F}_\omega)$, abusando del isomorfismo natural. Con lo cual, basta probar que $H^i(X,\mathscr{F}_\omega)=0$ para $i>n$. Sea ω' un subconjunto de ω (preferentemente no vacío) y sea ω'' un conjunto tal que $\#\omega''=\#(\omega-\omega')$, se tiene una sucesión exacta de la forma:

$$0\to\mathscr{F}_{\omega'}\to\mathscr{F}_\omega\to\mathscr{G}_{\omega''}\to 0,$$

donde $\mathscr{G}_{\omega''}$ es un haz con secciones en ω''. Construyamos nuevamente la sucesión exacta larga de cohomologías proveniente de la sucesión exacta corta anterior:

$$0\to H^0(X,\mathscr{F}_{\omega'})\to H^0(X,\mathscr{F}_\omega)\to H^0(X,\mathscr{G}_{\omega''})\xrightarrow{\partial} H^1(X,\mathscr{F}_{\omega'})\to H^1(X,\mathscr{F}_\omega)\to\dots$$

$$\dots\xrightarrow{\partial} H^i(X,\mathscr{F}_{\omega'})\to H^i(X,\mathscr{F}_\omega)\to H^i(X,\mathscr{G}_{\omega''})\xrightarrow{\partial} H^{i+1}(X,\mathscr{F}_{\omega'})\to\dots\ .$$

Ahora, como $\#\omega',\#\omega''<\#\omega$, por inducción en $\#\omega$, basta probar la anulación de los grupos de cohomología superiores para el haz $\mathscr{F}_\omega$ generado por una única sección, en algún abierto determinado U. Esto dice que $\mathscr{F}$ está soportado en U y que $\mathscr{F}(V)$ es un grupo cíclico para todo $V\subset X$ (eventualmente trivial). Entonces $\mathscr{F}$ es un cociente del haz $\mathbb{Z}_U$, que de acuerdo con la notación introducida al comienzo de esta sección en 2.22(b), $\mathbb{Z}_U=j_!(\mathbb{Z}|_U)$, donde $\mathbb{Z}$ denota el haz constantemente $\mathbb{Z}$ en X y $\mathbb{Z}|_U$ su restricción a U. Notando por $\mathscr{K}$ al núcleo, se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0\to\mathscr{K}\to\mathbb{Z}_U\to\mathscr{F}\to 0,$$

que da lugar a una sucesión exacta larga de cohomologías:

$$0\to H^0(X,\mathscr{K})\to H^0(X,\mathbb{Z}_U)\to H^0(X,\mathscr{F})\xrightarrow{\partial} H^1(X,\mathscr{K})\to H^1(X,\mathscr{F}_\omega)\to\dots$$

$$\dots\xrightarrow{\partial} H^i(X,\mathscr{K})\to H^i(X,\mathbb{Z}_U)\to H^i(X,\mathscr{F})\xrightarrow{\partial} H^{i+1}(X,\mathscr{K})\to\dots\ .$$

Con lo cual, basta probar que las cohomologías superiores a n se aulan para $\mathscr{K}$ y $\mathbb{Z}_U$.

Paso 4. Sea U un abierto de X, y sea $\mathscr{K}$ un subhaz de $\mathbb{Z}_U$. Para cada $x\in U$, el stalk $\mathscr{K}_x$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Si $\mathscr{K}=0$, podemos evitar el resto de este paso y saltar al siguiente. Si no, sea d el menor entero positivo tal que aparece en $\mathscr{K}_x$, es decir, el generador del subgrupo de $\mathbb{Z}$ que estamos considerando, que naturalmente coincide con el orden de $\mathscr{F}_x$, y se tiene una sucesión exacta de grupos $0\to\mathscr{K}_x=d\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_x=\mathbb{Z}\to\mathscr{F}_x=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\to 0$.

Dado que esto sucede en $x\in U$, existe un abierto V de U, en donde esta situación se mantiene, es decir, $\mathscr{K}_V=\mathbb{Z}_V$, y se consigue una sucesión exacta corta de la forma

$$0\to\mathbb{Z}_V\to\mathscr{K}\to\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V\to 0.$$

Obsérvese que si tomamos $x\in V$, entonces $(\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V)_x=\mathscr{K}_x/(\mathbb{Z}_V)_x=0$ ya que $\mathscr{K}_V=\mathbb{Z}_V$. Luego, esto dice que $\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V$ está soportado en el cerrado $\overline{U-V}$ de X, que tiene dimensión menor que n. Ahora, como $\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V$ es un haz soportado en $Z'=\overline{U-V}$ que se incluye en X vía j', entonces $\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V$ lo podemos pensar como $\mathscr{G}_{Z'}=j'_*(\mathscr{G}|_{Z'})$ para algún $\mathscr{G}$, entonces usando el Lema 2.20 $H^i(Z',\mathscr{F})=H^i(X,j'_*(\mathscr{G}|_{Z'})$ y la hipótesis inductiva, tenemos que $H^i(X,\mathscr{K}/\mathbb{Z}_V)=0$ para todo $i>n-1$. Entonces por la sucesión exacta larga de cohomologías, sólo resta probar que los grupos de cohomologías se anulan para $\mathbb{Z}_V$.

Paso 5. (último!) Sólo resta probar que para cualquier abierto V de X, $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$ para todo $i > n$. Sea $Y = X - V$, entonces por el Lema 2.17(c), se tiene una sucesión exacta de haces sobre X de la forma $0 \to \mathbb{Z}_V \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Y \to 0$. Como $\dim Y < \dim X$, usando el Lema 2.20 y la hipótesis inductiva, se consigue que $H^i(X, \mathbb{Z}_Y) = 0$ para todo $i > n - 1$.

Por otro lado, al ser $\mathbb{Z}$ un haz constante en X, por la Proposición 2.12 se tiene que $\mathbb{Z}$ es flasque, y por 2.13 resulta que $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $i > 0$. Entonces de la sucesión exacta larga de cohomologías asociada a la sucesión exacta corta anterior, se tiene que $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$ para todo $i > n - 1$. $\square$

Referencias

[1] D. Eisenbud, J. Haris, *The geometry of Schemes*. Springer-Verlag, **GMT 192,** (1999).

[2] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie algébrique, III: Étude cohomologique des faisceaux cohérents (première partie)*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **Vol. 11,** (1961), 1-167.

[3] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie algébrique, III: Étude cohomologique des faisceaux cohérents (seconde partie)*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **Vol. 17,** (1963), 1-91.

[4] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, **GMT 52,** (1977).

[5] K. Ueno, *Algebraic Geometry 2*. Translations of Mathematical Monographs, **Vol. 197,** (1997).

[6] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advance Mathematics, **Vol. 38,** (1994).