Ejercicios adicionales (o complementarios) para Análisis del CBC de exactas o ingeniería

Sobre funciones (reales):

1) Sea $g : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}$, una función homográfica. Esto es, dada por la siguiente fórmula $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$.

a) Por qué se piden las condiciones anteriores sobre a, b, c, d?

b) Calcular el dominio maximal de g. ($Dommax(g)$ =el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en donde g está definida).

c) Calcular la imagen de g.

d) Demostrar que g es inyectiva.

e) Notar que si restringimos el codominio de g de forma tal que coincida con su imagen (es decir que obtenemos una nueva función $\tilde{g} : Dommax(g) \to Im(g)$ definida por la misma fórmula que antes) obtenemos una función biyectiva. En este caso, calcular su inversa (llamada $\tilde{g}^{-1}$). (Ver ejercicio 4)

f) Qué tipo de función resulta la inversa.

g) Calcular $Dommax(\tilde{g}^{-1})$ e $Im(\tilde{g}^{-1})$

h) Verificar esto (a - g) en un ejemplo.

Nota /sug. : puede ser una buena idea primero ver lo anterior en un ejemplo, y luego generalizar lo obtenido para cualquier homgráfica.

2) Sea $f : A \to B$ (se puede suponer que $A, B \in \mathbb{R}$). Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a)f es inyectiva ($\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

b)$\forall C$ (conjunto), $\forall g, h : C \to A$ (funciones) tales que $f \circ g = f \circ h$. Entonces $g = h$.

En diagramas: $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ tal que $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

3) Sea $f : A \to B$ (se puede suponer que $A, B \in \mathbb{R}$). Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a)f es sobreyectiva ($\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$).

b)$\forall C$ (conjunto), $\forall g, h : B \to C$ (funciones) tales que $g \circ f = h \circ f$. Entonces $g = h$.

En diagramas: $A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$ tal que $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

4) Sea $f : A \to B$ (se puede suponer que $A, B \in \mathbb{R}$). Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a)f es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).

b)$\exists g : B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$ (es decir que $g(f(x)) = x \forall x \in A$ y $f(g(x)) = x \forall x \in B$).

En diagramas: $\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "Id_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g=f^{-1}"] \arrow[loop right, "Id_B"] \end{tikzcd}$ $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$.

Sobre números reales:

5) Demostrar que si $0 \leq x < 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$ (sug.: usar el principio de arquimedeanidad).

6)Demostra usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ que $0,99999999.... = 1$ (0.9999999... representa el nmero que tiene todos 9 después de la coma, en su escritura decimal).

Sobre sucesiones:

7) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada por: $a_n = \frac{k^n.n!}{n^n}$, donde $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Determinar todos los valores de k tales que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y todos aquellos para los cuales diverge.

8) Demostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, valen las siguientes desigualdades:
$lg(n) < n^{1/a} < n < n^b < c^n < n! < n^n$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}_{>1}$ constantes.
Observar que este resultado es una importante herramienta para intuir el valor del límite de una sucesión.

Sobre límites en funciones reales:

9) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Demostrar que si interpretamos a la sucesión (a_n) como una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, entonces la noción de límite en el $+\infty$ coincide con la de límite para sucesiones. (Esto nos asegura la buena definición).

10) Demostrar que si $P \in \mathbb{R}[X]$ (i.e. P es un polinomio con coeficientes reales), y r es raíz de P (i.e $P(r) = 0$). Entonces existe $\tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$ tal que $P(x) = \tilde{P}(x).(x - r)$.

11) Sean $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Se considera el cociente $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y se sabe que $lim_{x\to r} f(x)$ es indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". a) Demostrar que r es raz de ambos polinomios. b) Usar el ejercicio anterior para mostrar un criterio para salvar la indetermninación.