NOTAS DE ANÁLISIS I

(**TOMO 1**: CAPÍTULOS 1 – 6 Y APÉNDICE A)

NICOLÁS S. BOTBOL

www.algoritmos.itgo.com

Versión: Mayo de 2005

ÍNDICE

1 - INTRODUCCIÓN

Conjuntos y relaciones

Comenzaremos definiendo la noción de conjunto, ya que es fundamental en toda la matemática. No profundizaremos demasiado en este tema ya que sólo se pretende que el lector tenga los rudimentos básicos para una buena comprensión del texto específico del libro. Si el lector está interesado en profundizar en este tema puede remitirse al apéndice B, o consultar la bibliografía.

Un conjunto es una colección de objetos bien definidos agrupados por cierta característica que los distingue del resto, por ejemplo el conjunto de las mujeres involucra a todos los seres humanos de sexo femenino. El conjuntos de números pares es aquel que involucra a los números que son divisibles por 2 como por ejemplo 4, 6, 8, … En general cuando hablemos de conjuntos haremos referencia a conjuntos numéricos, más aún, hablaremos principalmente de los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$, reales $\mathbb{R}$ y de sus subconjuntos. Así mismo dos conjuntos que serás de gran importancia tener presente son el conjunto vacío y el conjunto universal. El primero, el conjunto *vacío* (se lo nota de la siguiente forma: $\varnothing$), que se corresponde con aquel conjunto que no posee elementos, o si se quiere, con el conjuntos de los elementos que tienen la propiedad de ser distintos de sí mismos (claro está que no puede haber elementos distintos de sí mismos, por ello, el conjunto por ellos es el conjunto vacío). Esto es más formalmente: $\varnothing = \{x \,/\, x \neq x\}$ y esto se lee: "El vació es el conjunto formado por los x tales que $x \neq x$". El segundo, el conjunto *universal* (se lo nota de la siguiente forma: $\mathfrak{A}$), este es el conjunto que contiene a "todos" los elementos. Más formalmente: $\mathfrak{A} = \{x \,/\, x = x\}$ y esto se lee: "El conjunto universal es el conjunto formado por los x tales que $x = x$".

Cada vez que se tiene un conjunto, se pretende establecer una vinculación entre éste con algún otro conjunto (que podría ser sí mismo). Pensemos por ejemplo un caso muy sencillo: queremos comprar manzanas, sabemos que el kilo está a dos pesos, es decir por cada kilo que compre pagaré 2 pesos. Estoy estableciendo una relación entre el conjunto de precios y el conjunto de kilos posibles, en este caso como los precios posibles son 1, 2, 3,…. Pesos y los kilos 1, 2, 3,… kilos ambos conjuntos se representarán con los números naturales $\mathbb{N}$, o talvez con $\mathbb{N}_0$ que es el conjunto de los naturales agregándole el elemento 0, observar que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. (Ver apéndice B)

Podíamos pensar que ahora un kilo de manzana cuesta 1,50, con lo cual el conjunto de precios no estaría bien representado por los números naturales, ya que 1,50 es un precio posible pero no un natural. Representaremos entonces a los precios por los números racionales $\mathbb{Q}$. Teniendo aquí una relación entre el conjunto de números naturales (que representa los kilos) y el de los racionales (que representa los costos). A esta altura no es difícil ver que si decidiéramos comprar un kilo y medio, o admitiendo que nuestra compra de manzanas no es exactamente una cantidad de kilos entera, la relación sería entre los racionales con ellos mismos.

Pensemos por un momento que al tener un conjunto de Kilos posibles (A) y otro de Costos posibles (B) nos podría interesar vincularlos, es decir establecer una relación entre los valores de A y los de B. Para fijar ideas pensemos en la siguiente relación: R_m que vincula un valor de A (es decir un peso determinado) con el valor de B correspondiente al costo de esa cantidad de manzanas. En el primer ejemplo esto sería: $(1\ ;\ 1{,}5) \in R_m$ esto quiere decir que el valor 1 está relacionado con el valor 1,5. Otra relación posible sería: R_p la cual relaciona el precio con el valor de las peras: Defino R_p de la siguiente manera: $\begin{cases} (k\ ;\ 1{,}70.k) \in R_p & \text{si } k < 4 \text{ y no es cliente} \\ (k\ ;\ 1{,}60.k) \in R_p & \text{si } k \geq 4 \text{ y no es cliente} \\ (k\ ;\ 1{,}50.k) \in R_p & \text{si es cliente} \end{cases}$, en este caso el precio dependerá de que el comprador sea o no cliente y en caso de no serlo dependerá de si su compra supera o no los 4 kilos. Es decir, una relación es una vinculación entre elementos de dos conjuntos A y B, que a un elemento del conjunto A puede hacerle corresponder tanto uno, ninguno o más de un elemento del conjunto B, y viceversa.

Para fijar ideas sean A y B dos conjuntos tales que $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c\}$ todas las relaciones posibles están dadas por los siguientes pares: $(1,a);\ (2,a);\ (3,a);\ \ (1,b);\ (2,b);\ (3,b);\ \ (1,c);\ \ (2,c);\ (3,c)$ en el primer caso diremos que 1 se relaciona con a y se nota $(1,a) \in R$.

A lo largo del libro trabajaremos con algunos objetos que denominaremos funciones, que resultan ser casos particulares de relaciones, cuyo estudio comenzaremos en el próximo capítulo,

Naturales, Enteros, Racionales y Reales

Daremos entonces una definición un poco más detallada de los conjuntos numéricos que usaremos de aquí en más.

i) Naturales: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ no daremos una definición formal de estos números, para ello ver bibliografía [1CDIN]
ii) Enteros: $\mathbb{Z}=-\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ donde $-\mathbb{N}=\{-1,-2,-3,\dots\}$ i.e. los naturales con signo opuesto.
iii) Racionales: $\mathbb{Q}=\left\{ a/b \;/ a\in\mathbb{Z} \;\; y \;\; b\in\mathbb{N}\right\}$ observemos que los números racionales son los números fraccionarios, para los cuales el denominador no se anula ya que es un número natural.
iv) Reales: $\mathbb{R}$ no daremos una descripción formal de los números reales, sólo diremos que son aquellos números con los que el alumno de secundario está acostumbrado a trabajar. Podemos pensar que son todas las posibles tiras de números que sepamos construir, como ser: 234,23411213567899000044… ; 0,45454545… observar que todos los números racionales son reales, ya que si $q=a/b\in\mathbb{Q}$, i.e. $a\in\mathbb{Z}$ y $b\in\mathbb{N}$ entonces podemos hacer la división y obtenemos que el número $q=q_1\dots q_s,q_{s+1}\dots$, por ejemplo $26/7=3,714285714285714\dots$ observemos además que los números racionales tienen una periodicidad en su expresión decimal. Los números enteros y naturales son racionales, por lo tanto son periódicos 5 = 5,00000000… . Los números racionales no son los únicos reales, por ejemplo: $e=2,71828182846\dots$ y $\pi=3,14159265359\dots$ son reales no racionales.

No es difícil ver que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ y más aún, no vale en ninguno de estos casos la igualdad.

Para esto es necesario ver que todo natural es entero, todo entero es racional (si $n\in\mathbb{Z}$ y como $n=n/1 \Rightarrow n=n/1\in\mathbb{Q}$, ya que $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\mathbb{Z}$ y $1\in\mathbb{N}$), y según la definición aceptada de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

2 – Generalidades sobre funciones

Noción de función

Para hablar de funciones debemos recordar la idea de relación dada en el capítulo 1. Supongamos entonces que tenemos dos conjuntos A y B, y una regla que los vincula a la que llamamos una relación (R).

Definición: Diremos que (R) es una función si cumple las siguientes condiciones:

i) A cada punto de A le asigna un punto de B
ii) Para un punto dado $a \in A$ fijo, si $\exists\ b, b' \in B / (a,b) \in R$ y $(a,b') \in R$ entonces $b = b'$

Notación: en el caso anterior se escribe $R: A \to B$, por lo general se suele notar a las funciones con las letras f, g, h.

En conclusión diremos que $f: A \to B$ es una función si cada elemento $a \in A$ es asignado a uno y sólo un elemento $b \in B$.

Definición: Si $f: A \to B$ es una función llamaremos:

i) A es el dominio de la función f (y se nota $Dom(f) = A$)
ii) B es el codominio de la función f (y se nota $Cod(f) = B$)
iii) $f(A)$ es un subconjunto de B (no necesariamente igual a B) que se denomina imagen de f (y se nota $Im(f) = A$)

Si recordamos los ejemplos de relaciones dados en el capítulo 1, la primera relación que mostramos era R_m que vinculaba los valores de los pesos de las manzanas con sus respectivos costos. Pensemos por un instante que $A = \{los\ pesos\}$ y $B = \{los\ precios\}$ entonces podemos pensar que ahora R_m asigna a un peso dado un costos determinado (en este caso será 1,5 veces el peso en kilos), o sea $R_m(a) = 1{,}5.a$. Observemos además que si suponemos que los pesos sólo pueden ser positivos o cero, entonces a cada peso se le asigna un costo y sólo uno. Por lo tanto resulta que R_m es una función, para la cual $Dom(f) = A = \{los\ \ pesos\}$ y $Cod(f) = B = \{los\ \ precios\}$.

Gráfico

Siguiendo con el ejemplo anterior nos gustaría tener una forma más tangible para poder comprender el comportamiento de nuestra función. Una forma posible es mediante un gráfico.

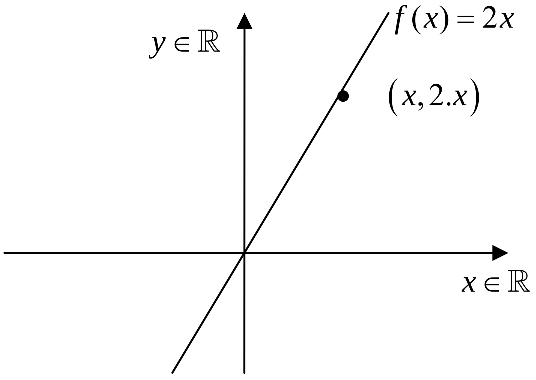
Recordamos del secundario el concepto de plano (espacio euclideo bidimensional) o también $\mathbb{R}^2$, formado por dos ejes ortogonales (perpendiculares) comúnmente denominados eje x (o eje de abscisas) y eje y (eje de ordenadas), el primero horizontalmente y el segundo vertical. En este nuevo espacio $(\mathbb{R}^2)$ llamaremos puntos a sus elementos que tendrán la forma de pares ordenados (x_0, y_0) donde la primera coordenada corresponde a la posición vertical (posición sobre el eje de las abscisas) y la segunda corresponde al valor de las ordenadas.

Para fijar ideas veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Consideremos una función que tiene como dominio y codominio al conjunto de todos los números reales, es decir, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida de manera tal que mande a cada elemento a su doble, o sea $f(x) = 2.x$

Es claro entonces que en este caso la imagen de f coincide con el codominio de f. Para ver esto basta tomar un valor en codominio, $b \in Cod(f)$ y ver que existe un valor $a \in Dom(f)$ tal que $f(a) = b$. Para ello basta tomar $a = b/2$.

Si realizamos un gráfico de esta función colocando tanto en el eje de abscisas como en el de ordenadas al conjunto $\mathbb{R}$, obtenemos:



Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

En el estudio de las funciones podemos distinguir a las funciones según su comportamiento respecto de los elementos de su dominio y de su codominio. Quisiéramos poder distinguir a una función que siempre manda dos elementos distintos a dos distintos y aquellas que no. Para fijar idea, pensemos en la función del ejemplo anterior, es bastante claro que esta función siempre envía dos elementos a elementos distintos, matemáticamente decimos que si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$. Supongamos que $f(a) = f(b)$ y veamos que $a = b$. Si $f(a) = f(b)$, entonces como $f(x) = 2x$ tenemos que $2.a = 2.b$ y multiplicando por el inverso multiplicativo de 2 a ambos lados obtenemos que $a = b$.

Como para que esto se vea más claro, consideremos la función $g(x) = x^2$, que dado un valor real cualquiera lo multiplica por sí mismo. Tomemos $a = 1$, $b = -1$, y claramente $a \neq b$,pero $g(a) = 1$ y $g(b) = 1$, luego $g(a) = g(b)$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice inyectiva si dados $x_1, x_2 \in A$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Con respecto a lo observado anteriormente, podemos decir que con las funciones f y g definidas como antes, f es inyectiva, y que g no lo es.

Por otro lado hay diferencia sustancial entre estas dos funciones: como ya observamos $Im(f) = \mathbb{R}$, lo cual coincide con su codominio. ¿Será esto cierto para la segunda? ¡Claramente no! Tomemos un elemento particular en el codominio y veamos que no pertenece a la imagen, por ejemplo que pasa si tomamos $b = -1$, ¿será cierto que existe $a \in Dom(f) = \mathbb{R}$ tal que $f(a) = b$? Responder esto es equivalente a preguntarse si existe $a \in Dom(f) = \mathbb{R}$ tal que $a^2 = -1$, y claramente la respuesta a esto es negativa, no hay elementos que elevados al cuadrado sean iguales a -1.

Esto motiva una nueva definición:

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice sobreyectiva (o suryectiva) si $\forall y \in B \ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

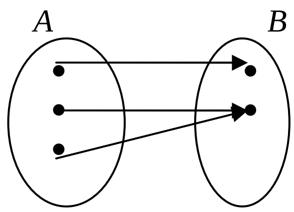


Diagrama que representa a una función no inyectiva.

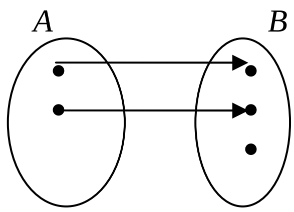


Diagrama que representa a una función no sobreyectiva.

Un teorema importante que caracteriza a las funciones sobreyectivas el es siguiente:

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función. Son equivalentes:

i) f es sobreyectiva

ii) $f(A) = B$ donde $f(A) = \{ y \in B / \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y \}$

iii) $Im(f) = Cod(f)$

Demostración: veremos entonces que $\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}$, $\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}$ y finalmente $\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}$.

$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}$) Sabemos f es sobreyectiva, luego $\forall y \in B \;\; \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$, entonces por la definición de $f(A)$ obtenemos que $B \subseteq f(A)$, y como $f(A)$ es un subconjunto de B entonces vale $f(A) \subseteq B$, y por lo tanto $f(A) = B$.

$\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}$ Sabiendo que $f(A) = B$, como por definición $f(A) = Im(f)$ y $B = Cod(f)$, obtenemos que $Im(f) = Cod(f)$

$\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}$ Sabiendo que $Im(f) = Cod(f)$ entonces podemos afirmar que para cualquier valor $y \in Cod(f)$, entonces $y \in Im(f) = f(A)$, por lo tanto como y es un elemento de $f(A)$, entonces por definición de $f(A)$ existe un elemento luego $x \in A$ tal que $f(x) = y$, lo cual nos da exactamente la definición que dimos de sobreyectividad.

Y con esto queda probado el teorema. □

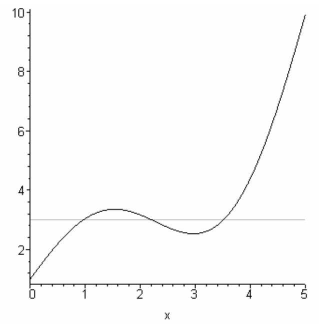
En conclusión podríamos haber adoptado cualquiera de estas como la definición de función sobreyectiva.

Es importante observar que la inyectividad no esta necesariamente ligada la sobreyectividad. Estos son conceptos que dependen fuertemente de la elección del dominio y codominio de la función. Se deja como ejercicio para el lector encontrar funciones que sean de un tipo y no del otro.

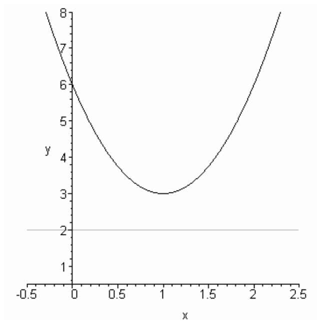
Concluiremos dando un nombre a aquellas funciones que cumplen las dos características anteriormente mencionados.

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

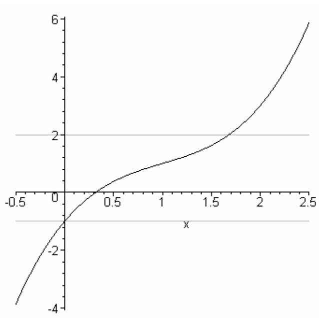
Para ver cómo estos conceptos se relacionan con el codominio de la función, basta analizar el gráfico de la función. Si para todo valor $y \in B = Dom(f)$ sucede que al trazar una recta horizontal corta en *al menos un punto* al gráfico de la función, entonces diremos que es sobreyectiva, ya que entonces podemos encontrar un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Si para todo valor $y \in B = Dom(f)$ sucede que al trazar una recta horizontal corta en *a lo sumo un punto* al gráfico de la función, diremos que es inyectiva ya que la función no repite valores del codominio. Luego en el caso en que para todo valor $y \in B = Dom(f)$ suceda que al trazar una recta horizontal corte en *uno y sólo un punto* al gráfico de la función, diremos que es biyectiva, ya que será inyectiva y sobreyectiva a la vez.



Ejemplo de función no-inyectiva



Ejemplo de función no-sobreyectiva



Ejemplo de función biyectiva

Otras consideraciones sobre funciones

En la sección anterior hemos estudiado como clasificar a las funciones de acuerdo con su comportamiento respecto de su dominio y codominio, veremos ahora cómo clasificarlas según su simetría respecto de los ejes coordenados.

Definición: Una función f se dice par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio.

Notar que esta definición nos está diciendo que toda función par es simétrica respecto del eje Y, ya que la función toma el mismo valor en los puntos x y $-x$.

Definición: Una función f se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio.

Observara ahora que esta definición no nos dice nada sobre su simetría respecto de alguno de los ejes, sino que dice que toda función par es simétrica respecto del origen, ya que toma el mismo valor en los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, -f(x))$.

Definición: Una función f se dice periódica con período $p\,(p > 0)$ si $f(x+p) = f(x)$ para todo x.

Si realizamos un gráfico de una función periódica notaremos inmediatamente que existe un intervalo en el cual la función toma ciertos valores y que en el resto del dominio repite periódicamente estos valores tomados. Para ver esto con más claridad grafiquemos alguna de las funciones trigonométricas clásicas, por ejemplo el seno.

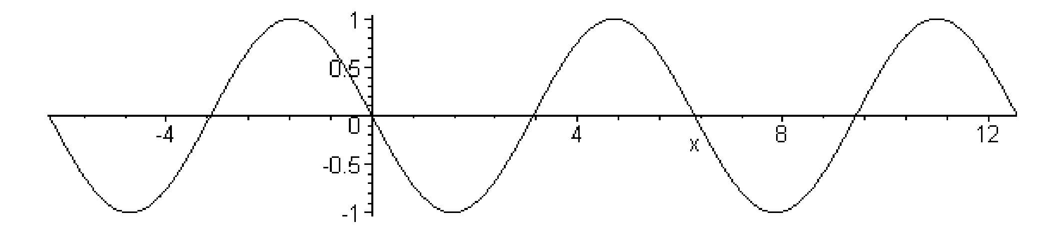


Gráfico de la función $f(x) = \sin(x - \pi)$. *Período:* 2π , *amplitud:* 1.

Obs.: El período de la función $f(x) = A\sin(Bx + C)$ ó $f(x) = A\cos(Bx + C)$ es $\dfrac{2\pi}{|B|}$.

Se deja como ejercicio para el lector determinar cuál es el período de la función $f(x) = \tan x$.

Para las funciones trigonométricas definiremos su *amplitud* como $|A|$, esto indica la diferencia entre las ordenadas de los valores máximos y los valores mínimos

Veamos ahora algunos ejemplos que ayudarán a clarificar lo visto en las secciones anteriores de este capítulo.

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$, entonces si $m \neq 0$, f es sobreyectiva ya que dado $y_0 \in \mathbb{R} = Cod(f)$, basta tomar $x_0 = {}^{y_0 - b}\!/_{m} \in \mathbb{R} = Dom(f)$, y se verifica que $f(x_0) = y_0$, (observar que $Im(f) = Cod(f)$). f es inyectiva ya que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $mx_1 + b = mx_2 + b$, luego despejando $x_1 = x_2$. Por lo tanto f es biyectiva y se ve que como $f(a) = ma + b$ y como $f(-a) = m(-a) + b = -ma + b$, resulta ser par si

$f(a) = f(-a) \Leftrightarrow$
$m(-a) + b = ma + b \Leftrightarrow m(-a) = ma \Leftrightarrow 2ma = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Y resulta ser impar si $f(a) = -f(-a) \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow -m(-a) - b = ma + b \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Observar que la única función par impar a la vez es la función $f(x) = 0 \ \ \forall x$.

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, entonces f no es sobreyectiva ya que existe un valor $y_0 \in \mathbb{R} = Cod(f)$ para el cual no existe $x_0 \in \mathbb{R} = Dom(f)$ tal que $f(x_0) = y_0$, en este caso basta tomar $y_0 = -1$, y claramente no existe $x \in \mathbb{R} = Cod(f)$ tal que $f(x) = x^2 = y$, observar que $Im(f) = \mathbb{R}_{>0} \neq \mathbb{R} = Cod(f)$. Y f no es inyectiva ya que existen $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, en este caso basta tomar $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, y se ve que $f(x_1) = (1)^2 = 1 = (-1)^2 = f(x_2)$. Por lo tanto f no resulta ser biyectiva. Se puede ver que $f(a) = a^2 = (-a)^2 = f(-a)$, luego f es par.

- Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$. Se deja de ejercicio mostrar que f es biyectiva, y analizar los casos $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, con $f(x) = x^2$.

- Sea $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$, con $f(x) = \dfrac{2}{x-a} + b = \dfrac{bx + (2 - ba)}{x - a}$, veamos que es biyectiva. Es sobreyectiva ya que $Im(f) = \mathbb{R} - \{b\} = Cod(f)$ (se deja de ejercicio verificar esto). Es inyectiva ya que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $\dfrac{2}{x_1 - a} + b = \dfrac{2}{x_2 - a} + b \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1 - a} = \dfrac{2}{x_2 - a} \Leftrightarrow 2(x_2 - a) = 2(x_1 - a) \Leftrightarrow x_2 = x_1$. Por lo tanto f es biyectiva. Se deja como ejercicio para el lector verificar que f no es ni par ni impar.

Composición de funciones

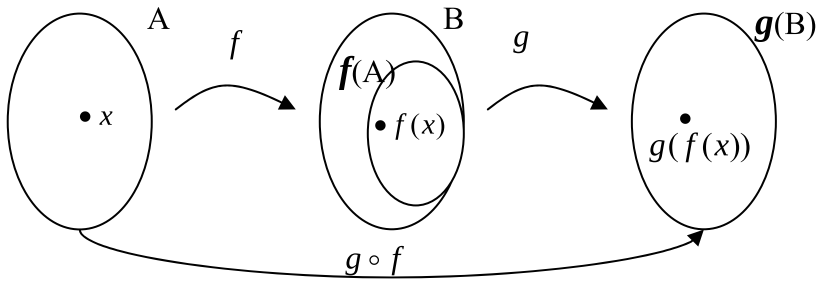
En esta sección veremos una propiedad que tienen las funciones que es de mucha utilidad, veremos que dos funciones se pueden *componer*. Para comenzar supongamos que queremos tapizar un cuadrado de 10 cm. de lado, con una tela que cuesta \$0,2 el cm^2, entonces primero calculamos el área (10 cm. . 10 cm.=100 cm^2) y luego calculamos su valor (100 . 0,2 = 20).

Pensemos matemáticamente cómo fue nuestro proceder.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lado} & \xrightarrow{f(x)=x^2} & \text{Área} & \xrightarrow{g(x)=0,2.x} & \text{Costo} \\ 10 & \longrightarrow & 100 & \longrightarrow & 20 \\ a & \longrightarrow & f(a) & \longrightarrow & g(f(a)) \end{array}$$

Esto indica que estamos aplicando dos funciones, primero $f(x)=x^2$, que es la función encargada de vincular el tamaño del lado con el área, y luego $g(x)=0,2.x$ que es la que relaciona el valor del área con el costo por unidad. Podemos resumir todo este trabajo construyendo una única función que sea la encargada de calcular el valor total a partir del tamaño del lado directamente. Veamos que el resultado final es $g(f(a))$, es decir, aplicar g al resultado de aplicarle f a a. Entonces definimos $h(x)=g(f(x))$ y lo notamos como $h=g\circ f$.

Definición (Composición de Funciones): Sean $f:A\to B,\ g:B\to C$ dos funciones. Definiremos la composición de g con f como $g\circ f$, tal que $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, es decir que g compuesta con f aplicada a un x funciona como aplicar g al resultado de haber aplicado f a x.



Veamos algunos ejemplos que nos servirá para clarificar cómo se realiza una composición de dos funciones:

Ejemplos:

i) Sean $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones definidas como $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ y $g(x)=x^2+2$. Veamos ahora cómo se comporta $h=g\circ f$. La función $h=g\circ f$ está definida como $h(x)=g(f(x))=g(\dfrac{2x+1}{x-3})=\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)^2+2=\dfrac{(2x+1)^2}{(x-3)^2}+2$. Notar que como $dom(h)=dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$ la función no se indefine.

ii) Pero si decidiéramos componer en sentido inverso es decir $l = f \circ g$, luego l se define como $l(x) = f(g(x))$: $l(x) = f(x^2+2) = \dfrac{2(x^2+2)+1}{(x^2+2)-3}$, deberíamos tener mucho cuidado con cuál es el dominio de l. Ya que $dom(l) = \left\{x \in \mathbb{R} / (x^2+2)-3 \neq 0\right\}$, es decir $dom(l) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. Esto es algo que no esperábamos a priori.

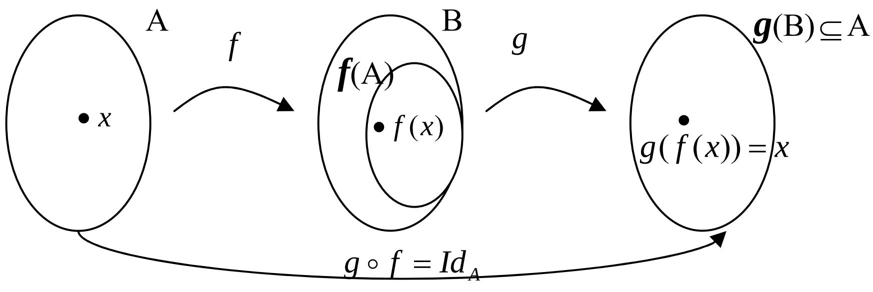
iii) Supongamos ahora que componemos dos funciones f y g cuyos dominios son $dom(f) = \mathbb{R} - \{a\}$ y $dom(g) = \mathbb{R} - \{b\}$ ¿Qué podemos decir del dominio de $h = g \circ f$ y $l = f \circ g$?

Calcules cuál es $dom(h) = dom(g \circ f)$, para empezar como $h(x) = g(f(x))$ es necesario que f esté definida donde h está definida, luego $a \notin dom(h)$. Pero además hay que tener cuidad de que g no reciba valores que no están en su dominio, es decir ¿qué pasa si $f(c) = b$, no podríamos calcular $g(f(c)) = h(c)$? Entonces tenemos que sacar todos los valores tales que vayan a para a b vía f, es decir debemos quitar todo el conjunto $f^{-1}(b) = \{c \in Dom(f) / f(c) = b\}$. Con lo cual obtenemos que $dom(h) = \mathbb{R} - \left(f^{-1}(b) \cup \{a\}\right)$.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que $dom(l) = \mathbb{R} - \left(g^{-1}(a) \cup \{b\}\right)$.

Función inversa

Supongamos ahora que estamos en las condiciones anteriores: $f: A \to B,\ g: B \to C$ dos funciones, y definimos $h = g \circ f$, es decir, h el resultado de aplicar f y luego g. ¿Qué pasa si la elección de hace de forma tal que g deshaga los cambios que produjo f? Como se muestra en el siguiente diagrama:



Dicho de otro modo, la composición de g con f no produce ningún cambio, $g(f(x)) = x$. Pensemos en el siguiente caso: $f(x) = 2x+7$ y $g(x) = {}^{x-7}\!/_{2}$.

Calculemos $h = g \circ f$: $h(x) = g(f(x)) = {}^{f(x)-7}\!/_{2} = {}^{(2x+7)-7}\!/_{2} = x$.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que $l(x) = (f \circ g)(x) = x$. Esto nos indica que las composiciones resultan ser las identidades de A y de B respectivamente, esto es $h = Id_A$, $l = Id_B$.

En este caso diremos que f y g son funciones inversas y resultará que $C = A$ ($f : A \to B,\ g : B \to A$).

Definición: Sean $f : A \to B,\ g : B \to A$ dos funciones tales que $f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f, entonces f y g se dicen funciones inversas (se suele decir que g es la función inversa de f y se nota $g = f^{-1}$).

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx+b,\ m,b \in \mathbb{R}$, como f es biyectiva si $m \neq 0$, entonces admite inversa. Calculemos f^{-1}: tomo $y = mx+b$ y despejamos. $y = mx+b \Leftrightarrow\ y-b = mx \Leftrightarrow {}^{y-b}\!/_{m} = x$ ya que $m \neq 0$, luego $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ se define como $f^{-1}(x) = {}^{x-b}\!/_{m}$.

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, como f no es biyectiva no admite inversa.

- Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$. Se deja de ejercicio mostrar que existe f^{-1} definida como $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y analizar los casos $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, con $f(x) = x^2$.

Sea $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$, con $f(x) = \dfrac{2}{x-a} + b = \dfrac{bx + (2-ba)}{x-a}$. Hemos visto que es biyectiva luego admite inversa y despejando obtenemos que como $y = \dfrac{2}{x-a} + b \Leftrightarrow y-b = \dfrac{2}{x-a} \Leftrightarrow x-a = \dfrac{2}{y-b}$ (ya que $y-b \neq 0$, porque $b \notin Cod(f)$) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{y-b} + a$, luego existe f^{-1} definida como $f^{-1} : \mathbb{R} - \{b\} \to \mathbb{R} - \{a\}$ donde $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-b} + a$.

El siguiente teorema nos da una caracterización de las funciones que son invertibles.

Teorema: Una función $f: A \to B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ admite inversa si y sólo si es biyectiva.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos primero que f admite inversa, entonces podemos definir una función $g: B \to A$ que resulte ser la inversa de f de lo cual sale que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ y $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in B$. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, luego $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ y por lo anterior $x_1 = x_2$, lo cual prueba la inyectividad. Por otro lado, sea $y_0 \in B$, queremos ver que hay un elemento $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$. Si consideramos $x_0 = g(y_0)$ resulta que $f(x_0) = f(g(y_0)) = y_0$ exactamente como queríamos.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que f es biyectiva y veamos que admite inversa, es decir, debemos definir una función $g: B \to A$ tal que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ y $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in B$. Tomemos entonces un elemento $y_0 \in B$, por la sobreyectividad de f sabemos que existe un elemento $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$ y sabemos por la inyectividad que ese elemento x_0 es único. Entonces definimos $g(y_0) = x_0$. Veamos que de esta forma obtenemos una función $g: B \to A$, que por construcción es la inversa de f. $\square$

Daremos ahora nombre a otros tipos especiales de funciones, y usaremos el teorema anterior para poder sacar conclusiones sobre la existencia de sus funciones inversas.

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ diremos que f es creciente en A si, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ diremos que f es decreciente en A si, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Observar que esto admite que en algunos puntos la función repita valores. Daremos un nombre a aquellas funciones crecientes (o decrecientes) que no repiten valores.

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ diremos que f es estrictamente creciente en A si, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ diremos que f es estrictamente decreciente en A si, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Notar que la desigualdad estricta impide que la función repita valores. Por otra parte, es claro que si una función es estrictamente creciente (decreciente), entonces es creciente (decreciente) a secas.

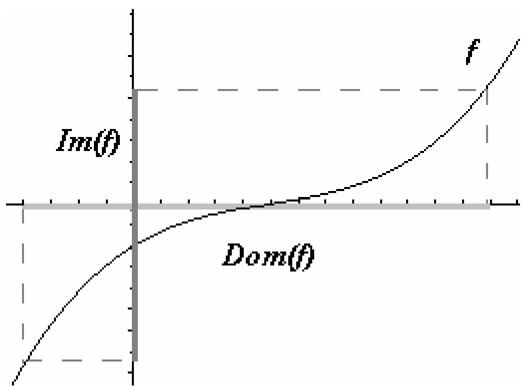
Para las funciones que son crecientes o decrecientes diremos que son *funciones monótonas*, y este término involucra a todas las funciones que son de la forma de las de las definiciones anteriores.

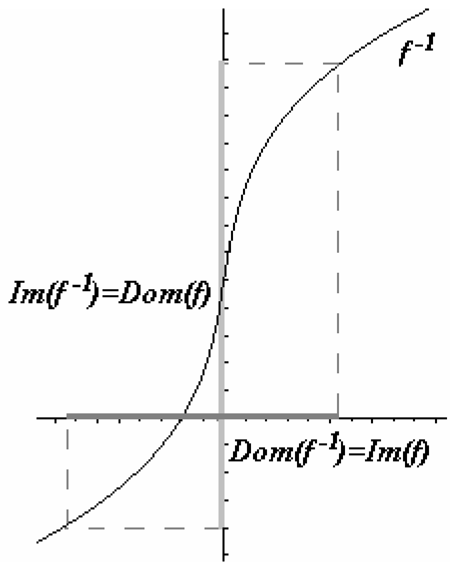
Veamos cómo aporta esto al objetivo de estudio de esta sección que es la existencia de la función inversa de una función dada.

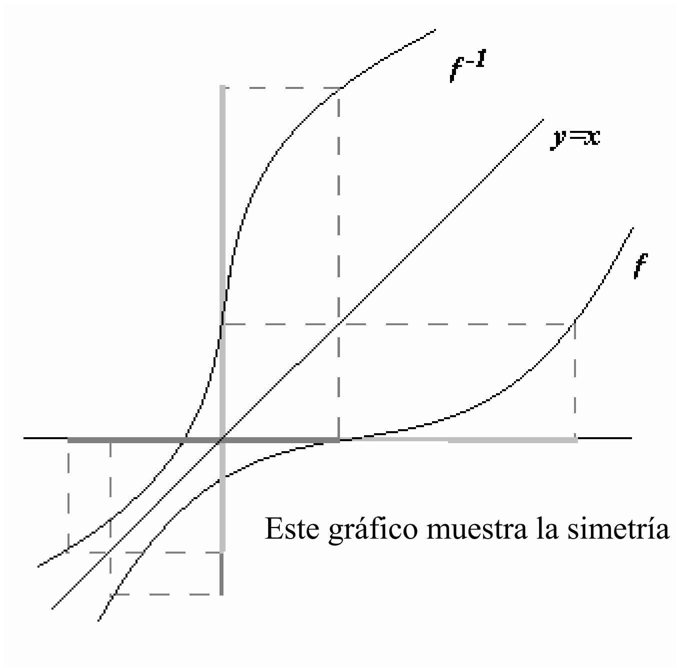
Supongamos que $f : A \to B$ es una función estrictamente creciente, por lo que vimos antes no repite valores en el codominio, ya que si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$ y entonces $f(x_1) < f(x_2)$ ó $f(x_2) < f(x_1)$ luego $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo cual prueba la inyectividad. Por otra parte si modificamos el codominio de f convenientemente, es decir, tomamos $B = Im(f)$, entonces resulta biyectiva, y por lo que vimos antes esto es equivalente a decir que f admite una función inversa. Esto prueba el siguiente teorema:

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente o decreciente en un intervalo, entonces f admite inversa.

En los siguientes gráficos se puede observar cómo la monotonía de la función implica la biyectividad y esto permite definir la función inversa. Además así se podrá apreciar cómo el gráfico de una función y el de su inversa resultan simétricos respecto de la recta $y = x$







Este gráfico muestra la simetría respecto de la recta $y = x$

Funciones especiales

Dedicaremos esta sección a estudiar algunos tipos de funciones particulares, a saber: Funciones lineales, cuadráticas y polinómicas en general.

Funciones lineales

Definición: diremos que una función $f : A \to B$ es lineal si responde a la forma $f(x) = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$.

La primera observación será que es gráfico de una función de este tipo esta representado por una recta. Es fácil ver que si $m = 0$ esta función resultará constante, es decir, tendremos que $f(x) = b$ para todo valor de x, con lo cual su gráfico sería una recta horizontal a la altura del valor b. Al número m lo llamamos la *pendiente* de la función, ya que en un gráfico de la función, éste determina la inclinación de la recta. Al valor b lo llamamos *ordenada al origen*. En resumen toda función lineal está determinada por dos valores: la pendiente y la ordenada al origen.

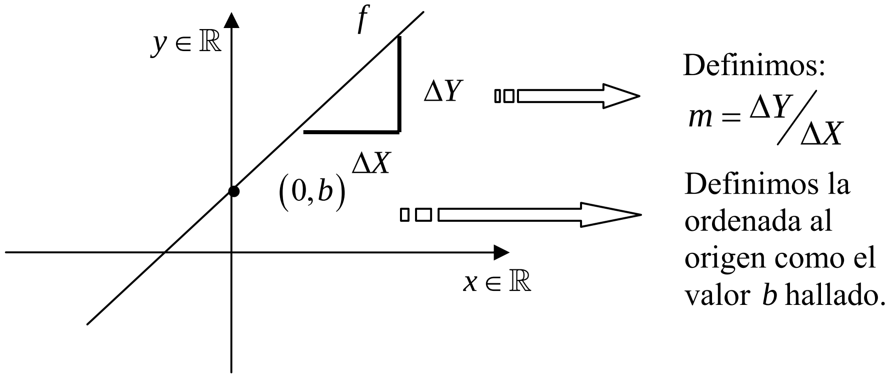
Una observación elemental que está relacionada con la geometría del gráfico de las funciones lineales es que como éste es una recta, bastaría conocer dos puntos del plano por donde esta función pasa para determinar su gráfico completo. Esto es: dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A \times B$, existe una única recta que pasa por esos puntos.

Más aún, veremos que dada una recta en el plano ($L \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$), hay una única función cuyo gráfico es L, esto junto con la observación nos permite ver que dos puntos cualesquiera $(x_0, y_0),(x_1, y_1) \in A \times B$ (no alineados verticalmente) determinan una única función lineal.

Veamos entonces que se cumple lo que afirmamos en el párrafo anterior, es decir, que dada una recta determinada en el plano hay una única función lineal para la cual esa recta representa su gráfico. Construiremos una función lineal donde el valor de m esté dado por la pendiente de la recta y el valor de b sea la coordenada del eje de las ordenadas (Y) donde el gráfico de la función corta a este mismo eje. ¿Cómo determinamos la pendiente? La pendiente esta dada por el cociente entre el incremento en el eje de las ordenadas, y el incremento en el eje de las abscisas. Es decir definiremos $m = {y_1 - y_0}/{x_1 - x_0} = {\Delta Y}/{\Delta X}$ y b estará definido como el valor que hace que $(0,b) \in L$.

Por construcción estos valores m y b son únicos. Supongamos que hubiera otro valor posible para b entonces como $b = f(0)$ ya que $f(0) = m0 + b$, este número determina que punto del plano de la forma $(0,b)$ que pertenece al gráfico de f. Y nuevamente sólo hay un posible valor para la pendiente de la recta que es el valor de m por definición, luego hay una única función posible para un gráfico dado.

El gráfico de abajo ilustra el proceder anterior.



Se enunciarán a continuación dos teoremas cuyas correspondientes demostraciones quedan como ejercicio para el lector.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función lineal, $f(x) = mx + b$, con $m,b \in \mathbb{R}$, entonces f es creciente si $m \geq 0$ y decreciente si $m \leq 0$.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función lineal, $f(x) = mx + b$, con $m,b \in \mathbb{R}$, entonces f es estrictamente creciente si $m > 0$ y estrictamente decreciente si $m < 0$.

Funciones cuadráticas

Definición: diremos que una función $f : A \to B$ es cuadrática si responde a la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Notar que esta última condición es fundamental ya que si a fuera 0 entonces f sería una función lineal.

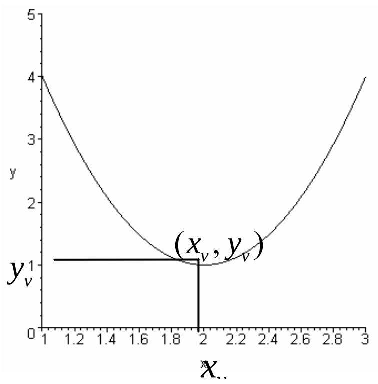
En este caso necesitaremos conocer estos tres valores para poder conocer unívocamente a la función cuadrática de la que se habla. Como sus gráfico está representado por una parábola necesitaremos ahora conocer tres puntos del plano (no alineados) por donde la parábola pasa para determinarla de forma única. Y como dada una parábola hay una única función para la cual ésta es su gráfico, entonces tres puntos en el plano (no alineados) determinan una única función cuadrática.

Una propiedad importante que diferencia a las funciones cuadráticas de las lineales es que para las primeras hay esencialmente una única forma de expresarlas ($f(x) = mx + b$), mientras que para las cuadráticas tenemos tres maneras posibles, a saber:

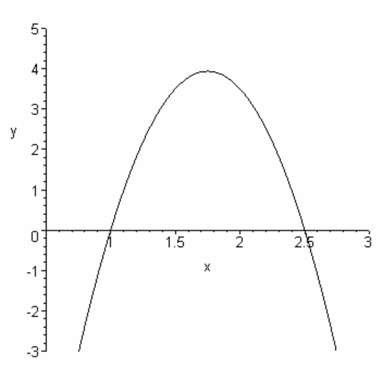
i) Forma poli nómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

ii) Forma canónica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, donde x_v representa el valor de las abscisas del vértice y y_v el valor de las ordenadas del vértice.

iii) Forma factorizada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 representan las raíces de f. Notar que si f no tiene raíces, es decir $f(x) \neq x$ para todo x, entonces no es posible expresar a f de esta forma.



No tiene raíces, $a > 0$.



Tiene raíces $r_1 = 1$, $r_2 = 2{,}5$, $a < 0$.

Revisemos los conceptos que se usaron en las definiciones:

Llamamos eje de simetría de la función al valor x_s de las abscisas para el cual se cumple que $f(x_s - h) = f(x_s + h)$, es decir, el gráfico de la función es simétrico respecto de la recta vertical $x = x_s$. Llamamos vértice al punto del plano $(x_s, f(x_s))$ y lo notamos (x_v, y_v).

Con respecto al número a diremos que su valor absoluto, que es el coeficiente correspondiente al término cuadrático, es el que determina la amplitud de la parábola. Esto quiere decir que cuanto mayor es el número $|a|$ la parábola que representa gráficamente a la función f estará más "abierta", cuanto menor sea $|a|$, la parábola estará más cerrada. Además si el valor de a es positivo la parábola estará "apoyada en su vértice", mientras que si a es negativo, entonces la parábola estará "colgando del vértice". Más formalmente diremos que: $a > 0$ entonces la función tendrá *concavidad positiva*, si $a < 0$ diremos que la función tiene *concavidad negativa*, o simplemente que es cóncava positiva o negativa respectivamente.

Los valores x_1 y x_2 mencionados en la tercera definición corresponden como ya dijimos a los ceros de la función, está claro que éstos podrían no existir. Consideremos el caso de la función $f(x) = x^2 + 1$, donde según la notación adoptada $a = 1$, $b = 0$, y $c = 1$. Debería ser claro para el lector que esta función no puede tener ceros, ya que buscar soluciones para la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente a buscar una solución para $x^2 + 1 = 0$, o sea $x^2 = -1$, lo cual sabemos que no es posible sobre el conjunto de los números reales. En casos como este en el cual la función cuadrática que se nos dio no admite expresión factorizada diremos que es *irreducible*, y gráficamente se condice con el hecho que su gráfico no corte el eje de las abscisas (las abscisas de estos posibles cortes son los candidatos a raíces de la función).

Funciones polinómicas

Este tipo de funciones serán tratadas muy brevemente. Es probable que el alumno esté acostumbrado a operar con polinomios, no haremos aquí ninguna distinción entre polinomios y funciones polinómicas ya que no pretendemos meternos en conceptos demasiado algebraicos, y escapa a los objetivos de este curso.

Este tipo de funciones generalizan a las funciones anteriores, recordemos que las funciones lineales son de la forma $f(x) = mx + b$, y las cuadráticas son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, en las primeras el mayor exponente que acompaña a las x es a lo sumo un 1, mientras que en las segundas es un 2. Llamaremos funciones polinómicas a aquella funciones que son sumas finitas de coeficientes de la forma ax^n, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, es decir ahora admitiremos que los exponentes sean tan grandes como se deseen. Es importante que el alumno no confunda a las funciones polinómicas con aquellas sumas en las cuales se permiten trabajar con infinitos términos, a estas se la llamarán series y las trataremos en el último capítulo.

Definición: diremos que una función $f: A \to B$ es polinómica si responde a la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$ para todo i entre 0 y n.

Con la notación de la definición anterior llamaremos *grado de* f al exponente de la x del primer término de coeficiente no nulo. Entonces ahora podemos formalizar la idea anterior de que las funciones polinómicas generalizan a las funciones lineales y a las cuadráticas. Podríamos definir a las funciones lineales como funciones polinómicas de grado menor o igual que 1, y a las funciones cuadráticas como aquellas funciones polinómicas de grado 2.
Dadas dos funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, definimos la suma de f con g como:
(Supondremos que $m > n$) entonces completando con ceros los términos correspondientes obtenemos que: $f(x) = \underbrace{0x^m + \ldots + 0x^{n+1}}_{\substack{\text{se completa con 0 los} \\ \text{términos restantes} \\ \text{para llegar a } m}} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y luego sumamos término a término obtenemos:
$f(x) + g(x) = (b_m + 0)x^m + \ldots + (b_{n+1} + 0)x^{n+1} + (b_n + a_n)x^n + \ldots + (b_0 + a_0)$.

Para facilitar la notación introduciremos aquí algún simbolismo que puede que al lector le resulte nuevo, es aconsejable que se asimile esta escritura lo más rápido posible, ya que será de frecuente uso en todas las materias de matemática desde aquí en adelante. Notaremos $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, es decir, la suma de los términos de la forma $a_i x^i$ desde $i = 0$ hasta $i = n$.

Ahora estamos en condiciones de definir el producto de funciones polinómicas. Dadas dos funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, definimos el producto de f con g como:

$f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{n+m} \big((b_0 + a_i) + (b_1 + a_{i-1}) + \ldots + (b_{i-1} + a_1) + (b_i + a_0)\big)x^i$, es decir, es una suma desde $i = 0$ hasta $i = n + m$, donde el i-ésimo sumando es la sumas de todos los coeficientes (tomados de a dos) cuyos índices suman i. Notar que esto nos es más que una generalización la propiedad distributiva que el lector ya conoce, si se quiere una forma "complicada" de escribir la distributiva de dos términos:
$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$.

Nuevamente la resta entre f y g está definida como $f+(-1).g$ donde, tanto la suma como el producto, son los recién mencionados.

3 - NÚMEROS REALES

Nuestro objetivo principal es profundizar el estudio sobre el comportamiento de las funciones ($f : A \to B$) y lograr operar con ellas. Para esto será necesario manejar bien el concepto de número real, ya que los conjuntos A y B donde trabajaremos serán en general subconjuntos de los números reales, es decir $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$.

Veremos en este capítulo cómo se representan los números reales sobre una recta. Y estudiaremos algunas de las propiedades que tienen los números reales y algunos de sus subconjuntos, entre ellas se destacan dos propiedades muy importantes como ser la propiedad de completitud y de densidad.

La recta real

Es conocido por la mayoría de los alumnos de secundario que los números reales pueden ser representados sobre una recta. ¿Esto no es acaso posible también con los números racionales, enteros y naturales? ¿Qué propiedad tan importante cumplen los números reales que los distinguen tanto del resto?

Para empezar observemos que si colocamos los números enteros o naturales sobre una recta quedan "agujeros", es decir, podemos observar que entre un natural y otro, o entre un entero y otro hay un espacio libre.

-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

Al final de este capítulo mostraremos que si bien los números racionales parecen llenar la recta, de todas forman siguen quedando agujeros. Sin embargo en cualquier segmento por más pequeño que sea, podremos encontrar un número racional ahí dentro (Propiedad de densidad). El resultado fundamental será que si colocamos todos los números reales sobre la recta, esta se llena completamente sin dejar agujeros, y este resultado será el ya mencionado principio de completitud.

Estudiaremos primero algunas propiedades elementales de los números reales en la sección siguiente, veremos cómo se comporta el conjunto $\mathbb{R}$, de los números reales, con respecto a las operaciones + (suma) y . (producto).

Axiomas de cuerpo ordenado

Consideremos para comenzar en conjunto de los números reales, un conjunto como se indico en el capítulo 1, no es más que una "bolsa de elementos", es decir, si pensamos en el conjunto de las manzanas, no podemos hacer ningún tipo de operación adición, multiplicación, potenciación, etc. En este caso decimos que un conjunto no está dotado de ninguna operación, es decir, no es más que los elementos que lo componen. (Ver apéndice B) Sin embargo nos interesaría poder definir sobre el conjunto de los números reales dos operaciones, para lo cual consideraremos a partir de ahora la terna $(\mathbb{R},\ +,\ .)$, o sea, el conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones + (suma) y . (producto). Esta terna forma lo que se denomina una estructura de Cuerpo (ver apéndice A).

Observemos que ahora ya tenemos estas dos operaciones se nos permiten sumar y multiplicar números reales, y como -1 es un número real también tenemos la resta ya que $a-b=a+(-1).b$ .A demás como todos los inversos de un número real no nulo también es un número real, es decir, si $a\in\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow {}^{1}\!/_{a}=a^{-1}\in\mathbb{R}$, entonces la división es una operación válida, ya que ${}^{a}\!/_{b}=a.\,{}^{1}\!/_{b}=a.b^{-1}$, y ya sabemos que $b^{-1}\in\mathbb{R}$ si $b\neq 0$.

Pero todo esto no nos dice nada a cerca de cómo se comparan dos números reales, es decir, nos gustaría poder decidir si dados a y b dos números reales cualesquiera alguno es mayor, menor o igual que el otro. Para esto consideraremos una nueva operación que será $\leq$ (menor o igual que), donde $a\leq b$ se lee: a es menor o igual que b . Entonces agreguemos esta operación a nuestra terna anterior y la transformaremos en una cuaterna $(\mathbb{R},\ +,\ .,\ \leq)$, donde ahora además de tener las operaciones ya mencionadas tenemos una nueva operación, que nos permite comparar dos elementos cualesquiera.

Observemos que la operación $\leq$ nos permite obtener nuevas operaciones, es decir si $a\leq b$ y $b\leq a$, entonces diremos que $a=b$ (a es igual a b), esto no es una propiedad, estamos definiendo la igualdad entre números reales, en el caso en que no suceda que $a=b$, diremos $a\neq b$ (a es distinto de b). Además si sabemos que $a\leq b$ y $a\neq b$, entonces diremos que $a<b$ (a es menor que b), nuevamente aquí estamos definiendo la operación <.

Veamos finalmente cuáles son los axiomas de cuerpo ordenado, es decir las propiedades que una cuaterna debe cumplir para ser un cuerpo ordenado.

Axiomas de cuerpo ordenado para $(\mathbb{R},\ +,\ .,\ \leq)$:

S1) *Conmutatividad*:
Dados dos números reales a y b vale que $a+b=b+a$

S2) *Asociatividad*:
Dados tres números reales a , b y c vale que $a+(b+c)=(a+b)+c$

S3) *Elemento neutro de la suma*:

Existe un número real 0 (cero) para el cual, para cualquier número real a, vale que $a+0=a$

S4) *Inverso aditivo*:

Dado un número real a, existe otro número real que representa el inverso aditivo de a, que notaremos $-a$, tal que $a+(-a)=0$

P1) *Conmutatividad*:

Dados dos números reales a y b vale que $a.b=b.a$

P2) *Asociatividad*:

Dados tres números reales a, b y c vale que $a.(b.c)=(a.b).c$

P3) *Elemento neutro del producto*:

Existe un número real distinto de cero 1 (uno) para el cual, para cualquier número real a, vale que $a.1=a$

P4) *Inverso multiplicativo*:

Dado un número real a distinto de cero, existe otro número real que representa el inverso multiplicativo de a, que notaremos a^{-1}, tal que $a.(a^{-1})=1$

D) *Distributividad*: (este axioma vincula las operaciones + y .)

Dados tres números reales a, b y c vale que $a.(b+c)=a.b+a.c$

O1) *Tricotomía*:

Dados dos números reales a y b vale una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$a<b$, $b<a$, $a=b$.

O2) *Transitividad*:

Dados tres números reales a, b y c que satisfacen que $a<b$ y $b<c$, entonces necesariamente vale que $a<c$.

O3) *Monotonía de la suma*:

Dados dos números reales a y b que satisfacen que $a<b$, entonces para cualquier número real c vale que $a+c<b+c$.

O4) *Monotonía del producto*:

Dados dos números reales a y b que satisfacen que $a<b$, entonces para cualquier número real c positivo ($0<c$) vale que $a.c<b.c$.

Un hecho muy importante es que toda la aritmética se basa en estos 13 axiomas, es decir que cualquier propiedad aritmética se desprende de aquí, veamos algunos ejemplos.

Teorema (0 es el elemento absorbente para el producto): Para cualquier número real a vale que $a.0=0$.

Demostración: Partimos de que $a.0=a.(0+0)=a.0+a.0$, la primera igualdad se debe a que aplicamos el axioma S3), y la segunda por el axioma D), de lo cual sale que $a.0=a.0+a.0$. Si ahora sumamos a ambos miembros el inverso aditivo de $a.0$, es decir $-(a.0)$ obtenemos que $a.0+(-(a.0))=a.0+a.0+(-(a.0))$. Veamos ahora que pasa con ambos términos: por un lado $a.0+(-(a.0))=0$ por el axioma S3), por otro lado $a.0+a.0+(-(a.0))=a.0+(a.0+(-(a.0)))=a.0$, primero por el axioma S2) y luego por S3). Con lo cual si juntamos lo obtenido llegamos a que $0 = a.0$, que era exactamente lo que queríamos probar. □

Se deja como ejercicio para el lector probar que $a.(-b) = (-a).b$, a partir de los 13 axiomas anteriores.

Supremo e ínfimo

El objetivo de este capítulo es principalmente exponer la noción de densidad de los números racionales y de completitud de los reales. Para entender que significa la propiedad de completitud que posee $\mathbb{R}$ será necesario dar algunas definiciones previas, que será lo que haremos en esta sección y en la siguiente:

Definición: Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ se dice acotado superiormente si existe un número real M tal que cualquiera sea $a \in A$, resulta que $a \leq M$. Un valor M como el hallado se llama una cota superior de A.

Definición: (análoga a la anterior) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ se dice acotado inferiormente si existe un número real m tal que cualquiera sea $a \in A$, resulta que $m \leq a$. Un valor m como el hallado se llama una cota inferior de A.

Observaciones:

i) Podría no haber cotas superiores, esto corresponde al caso en que el conjunto continúe hasta el infinito positivo (observar que los números naturales como subconjunto de los reales no está acotados superiormente). (Ver más adelante, al final del capítulo: Principio de Arquímedes)

ii) Podría no haber cotas inferiores, como en el caso anterior esto corresponde al caso en que el conjunto continúe hasta el infinito negativo (observar que los números enteros como subconjunto de los reales no está acotados inferiormente).

iii) Es fácil observar que si un conjunto posee una cota superior, entonces posee infinitas. Para esto no hace falta más que ver que si M es cota superior de $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces los números reales $M+1$, $M+2$, $M+3\ldots$ son también cotas superiores.

iv) Análogamente sucede con las cotas inferiores, si hay una entonces puedo encontrar infinitas.

v) Puedo definir un orden sobre el conjunto de cotas superiores, es decir habrá cotas más grandes que otras, por ejemplo $M < M+2$.

vi) Puedo definir un orden sobre el conjunto de cotas inferiores, es decir habrá cotas más pequeñas que otras.

Las preguntas que podemos formularnos a esta altura son ¿habrá una cota superior que sea la más chica de todas? O sea una que sea la que está más próxima al conjunto ¿podrá pasar que ésta pertenezca al conjunto? Y análogamente con las cotas inferiores.

Con respecto a la primera pregunta, esta propiedad que habíamos mencionado de los números reales, que los diferencia de los racionales, o sea la completitud de $\mathbb{R}$ en término de cotas inferiores y superiores nos permite asegurar la existencia de una cota más próxima al conjunto. Es decir en el conjunto de todas cotas superiores de un conjunto, habrá una que sea la más pequeña, y en el conjunto de todas las cotas inferiores, habrá una que sea la más grande.

Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición: Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado superiormente posee una cota superior S que es menor que las demás. Es decir, cualquiera sea M cota superior de A, podemos afirmar que $a \leq S \leq M$ para todo $a \in A$. Un valor S como el hallado se llama el supremo de A (este valor es único y se nota $\sup(A)$).

Definición: (análoga a la anterior) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado inferiormente posee una cota inferior I que es mayor que las demás. Es decir, cualquiera sea m cota superior de A, podemos afirmar que $m \leq I \leq a$ para todo $a \in A$. Un valor I como el hallado se llama el ínfimo de A (este valor es único y se nota $\inf(A)$).

La segunda pregunta motiva las siguientes definiciones:

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente con supremo S decimos que S es el máximo del conjunto si $S \in A$. Es decir, si el supremo está dentro del conjunto lo llamamos máximo (este valor es único, por se único el supremo).

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente con ínfimo I decimos que I es el mínimo del conjunto si $I \in A$. Es decir, si el ínfimo está dentro del conjunto lo llamamos mínimo (este valor es único, por se único el ínfimo).

En conclusión, es supremo de un conjunto es la menor de todas las cotas superiores y el ínfimo es las mayor de todas las cotas inferiores. Si es supremo pertenece al conjunto se le dice máximo, si el ínfimo pertenece al conjunto se le dice mínimo.

Antes de dar ejemplos veamos algunas definiciones más, que nos permitirán construir los ejemplos y mostrar dos teoremas importantes vinculados con la completitud.

Definición: Llamaremos intervalos a los segmentos de la recta real.

Definición: Diremos que I es un intervalo cerrado si: $I = \{x \in \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a,b]$.

Definición: Diremos que I es un intervalo abierto si: $I=\{x\in\mathbb{R}/\exists a,b\in\mathbb{R}: a<x<b\}=(a,b)$.

Definición: Diremos que I es un intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha si: $I=\{x\in\mathbb{R}/\exists a,b\in\mathbb{R}: a\le x<b\}=[a,b)$.

Definición: Diremos que I es un intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha si: $I=\{x\in\mathbb{R}/\exists a,b\in\mathbb{R}: a<x\le b\}=(a,b]$.

Ejercicio: Convencerse de que la unión de intervalos no es necesariamente un intervalo.

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo: Dado el conjunto A, escribir A como intervalo o como unión de intervalo, graficarlo en la recta numérica. Calcular: $\sup(A)$, $\inf(A)$, y decidir si estos son máximos o mínimos.

Consideremos el conjunto dado: $A=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3>-2x^2+1\}$

Aquí, los *elementos del conjunto* son los $x\in\mathbb{R}$ y $2x^2-3>-2x^2+1$ es *la condición* que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto A.

Luego a partir de la condición despejamos:

$2x^2-3>-2x^2+1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2x^2-3-(-2x^2+1)>0 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4x^2-4>0 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4(x^2-1)>0 \quad\Leftrightarrow$

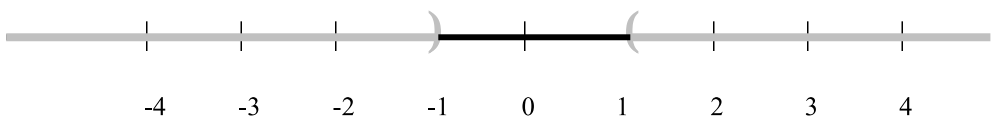
$\Leftrightarrow\ x^2>1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ |x|>1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x>1 \ \vee\ -x>1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x<-1 \ \vee\ x>1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$



En este caso es claro que el conjunto obtenido no está acotado, tanto superior como inferiormente. Luego no tiene sentido hablar de supremo o ínfimo, ni máximos o mínimos, ya que para esto necesitamos que el conjunto esté acotado superior o inferiormente respectivamente.

Observemos que si se considera un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, no vacío, acotado inferiormente, parecería razonable pensar que hay una relación entre $\inf(A)$ y $\sup(-A)$, donde $-A = \{-a / a \in A\}$.

Para fijar ideas veamos que si consideramos el intervalo abierto $A = (a,b)$, con $a < b$, resulta que $\inf(A) = a$. Por otro lado $-A = (-b,-a)$, y entonces $\sup(-A) = -a$, ya que es un intervalo abierto donde $-b < -a$. En resumen, parecería que $\inf(A) = -\sup(-A)$. Formalicemos esto:

Teorema: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, un conjunto no vacío acotado inferiormente. Entonces $\inf(A) = -\sup(-A)$. (Equivalentemente $-\inf(-B) = \sup(B)$, con $B = -A$).

Demostración: Demostraremos que $-\inf(-B) = \sup(B)$. Supongamos que $c = \sup(B)$, tenemos entonces que es una cota superior de B, y que es la menor de todas las cotas superiores de B, y queremos ver que $-c = \inf(-B)$, o sea que $-c$ es una cota inferior de $-B$, y que es la mayor de todas las cotas inferiores de $-B$. Supongamos que $-c$ no fura una cota inferior de $-B$, entonces existe un elemento $-r \in -B$, tal que $-r < -c$, pero entonces sería $c < r$ y como $-r \in -B$ entonces $r \in B$, lo cual contradice que c es una cota inferior de B. Entonces $-c$ debe ser una cota inferior de $-B$.

Veamos ahora que es la mayor de todas. Nuevamente, supongamos que no, es decir que hay una cota inferior de $-B$ mayor que $-c$. Esto significa que existe un elemento $-s$ que es cota inferior de $-B$ tal que $-c < -s$, entonces $s < c$, luego como $-s$ es cota inferior de $-B$ entonces s es cota superior de B y $s < c$, lo cual contradice que $c = \sup(B)$. Por lo tanto $-c$ tiene que ser la mayor de todas las cotas inferiores, lo cual nos indica que $-c = \inf(-B)$, y esto prueba lo que queríamos. □

Abiertos y cerrados

Como vimos en las definiciones anteriores, podemos encontrar diversos tipos de intervalos en $\mathbb{R}$, pero además, los intervalos no son los únicos subconjuntos posibles de $\mathbb{R}$. Pensemos por ejemplo en la unión de dos intervalos, está claro que eso no es necesariamente un intervalo, por ejemplo si uno el intervalo $(0,1)$ con el intervalo $(3,4]$, esto es $(0,1) \cup (3,4]$ y no resulta un intervalo.

Veamos entonces cómo se generaliza esto:

Definición: Se dice que G es un conjunto abierto, si para cualquier elemento $g \in G$, se puede encontrar un intervalo abierto I que contenga a g, tal que I

esté completamente contenido en el conjunto G. Usando notación matemática diremos que G es abierto si $\forall g \in G$, $\exists$ I intervalo abierto tal que $g \in I \subseteq G$. Claramente el intervalo I depende de la elección de g.

Pensemos ahora que tenemos dos intervalos abiertos (a,b), (c,d), la unión de ellos será un conjunto abierto (se deja al lector verificar esta propiedad), más en general, si tenemos una unión finita de intervalos abiertos, esta resultará también un conjunto abierto.

Se puede ver en las definiciones del parágrafo anterior que si un intervalo no es abierto esto no implica que sea cerrado. Sin más, pensemos en el ejemplo anterior $(3,4]$, veamos que esta idea se extiende a conjuntos más generales de la recta. Es decir:

Definición: Se dice que un conjunto F es un conjunto cerrado si su complemento $(F^c = \mathbb{R} - F)$ es abierto.

Para ver esta idea pensemos en el intervalo $I = [a,b]$, su complemento se escribe como $I^c = \mathbb{R} - [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ que es unión de dos intervalos abiertos (se deja al lector hacer las demostraciones que se crean necesarias)

Proposición: El conjunto vacío $(\varnothing)$ es abierto
Demostración: Para esto será necesario que el lector tenga cierta madurez matemática. La idea será muy simple: tenemos que ver que se cumple la definición, es decir, para cualquier elemento que tome que esté en el vacío, debería haber un intervalo que lo contenga, y que a su vez, esté contenido en el vacío, pero como no hay ningún elemento en el vacío, esto se cumple trivialmente. (El lector que no maneje estos conceptos puede remitirse al apéndice B, dónde serán explicados con más detalles). □

Proposición: El conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ es abierto.
Demostración: Esto también es fácil y no hay más que hacer que mirar la definición, si tomamos un elemento $g \in \mathbb{R}$, considero el intervalo $I = (g-1, g+1)$ (que como dijimos antes depende de la elección de g) y se verifica que $I \subseteq \mathbb{R}$ por ser este un intervalo de números reales (más aún, cualquier intervalo que contenga a g serviría para nuestro propósito). □

Corolario: El conjunto vacío $(\varnothing)$ es cerrado
Demostración: para ver esto no hay más que mirar la definición, bastará ver que su complemento es abierto. Sabemos que su complemento es $\varnothing^c = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R}$, que por la proposición anterior sabemos que es abierto. Entonces queda probado que el conjunto vacío es cerrado. □

Corolario: El conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ es cerrado
Demostración: Sabemos que su complemento es $\mathbb{R}^c = \varnothing - \mathbb{R} = \varnothing$, que por la primera proposición sabemos que es abierto. Entonces queda probado que el conjunto de todos lo números reales es cerrado. □

Densidad de $\mathbb{Q}$ y completitud de $\mathbb{R}$

Tal como advertimos en la primera sección de este capítulo nos dedicaremos de lleno a ver de qué manera se comportan los racionales al ser colocados sobre la recta. Para empezar estos parecerían completar la recta un poco mejor que los enteros y naturales. Está claro que el racional $2/5 = 0,2$ estará entre el 0 y el 1. Y el $1/5 = 0,1$ estará entre el 0 y el $2/5$.

Veamos entonces que si tenemos los números racionales a y b $(a < b)$ reprensados en la recta entonces entre ellos dos podemos colocar algún otro racional. Pensemos dónde debería estar el número $(a+b)/2 = a/2 + b/2$ como $a < b$ tenemos que $a = a/2 + a/2 < a/2 + b/2 < b/2 + b/2 = b$ por lo tanto $a < a/2 + b/2 < b$, entonces está entre a y b.

A esta propiedad que cumplen los racionales (entre dos racionales cualesquiera hay uno en el medio) la llamamos la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en la recta. Entonces obtenemos el siguiente

Teorema: Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ $(a < b)$ cualesquiera, existe un número racional c tal que $a < c < b$.

Dicho de otra forma, si tomamos una porción cualquiera de segmento de la recta construida anteriormente podemos observar que seguro que tenemos un racional ahí metido, esto se debe a que si tomamos un racional a la izquierda del segmento y otro a la derecha, considerando lo anterior y repitiendo el procedimiento de calcular el racional medio entre los anteriores podemos colocar uno dentro del intervalo.

Como bien sabemos los racionales son un subconjunto propio de los reales (es decir que todos los racionales son reales, pero hay reales que no son racionales). Pensemos entonces en el número x positivo tal que elevado al cuadrado da 2, es decir $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Vemos que este número no es racional. Supongamos que sí lo es entonces $\sqrt{2} = a/b$ con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ tales que a/b es irreducible, por lo tanto $2 = \left(a/b\right)^2 = a^2/b^2$, luego $2b^2 = a^2$ entonces a^2 es múltiplo de 2, pero por ser a^2 un cuadrado entonces es múltiplo de 4, entonces b^2 es múltiplo de 2, entonces a y b son ambos múltiplos de 2, luego llegamos a que a/b no es irreducible, esto es un absurdo ya que habíamos supuesto que sí lo era. Por esto es que $\sqrt{2}$ es irracional.

Hemos visto en el capítulo anterior algunos ejemplos de números reales, nos dedicaremos a estudiar algunas de las propiedades más importantes que tienen estos números en el análisis matemático.

Propiedad (de completitud): Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente tiene supremo. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup(A)$.

Veremos que esta propiedad no es extensible al conjunto de los números racionales. Para ello consideremos el conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2 \right\}$. Si pensamos al conjunto A como un conjunto con elementos en los reales, es evidente que el supremo sería $\sqrt{2}$, pero éste es irracional, supongamos entonces que hubiera otro candidato a supremo para A, pero ahora en los racionales, digamos que $\sup_{\mathbb{Q}}(A) = c$ con $c \in \mathbb{Q}$, entonces como el conjunto de los racionales es un subconjunto de los racionales entonces $c \in \mathbb{R}$. Hay dos posibilidades: o bien $c < \sqrt{2}$ o bien $c > \sqrt{2}$. Supongamos que $c < \sqrt{2}$: entonces $c^2 < 2$, por la propiedad de densidad de los números racionales (enunciada y demostrada al final de este capítulo) existe un valor $r \in \mathbb{Q}$ tal que $c < r < \sqrt{2}$ y $r^2 < 2$, luego $r \in A$, lo cual contradice que c sea el supremo, ya que no es cota superior. Análogamente se procede si $c > \sqrt{2}$. Este absurdo parte de suponer que el conjunto A admite supremo sobre los racionales. Luego como no todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ admite supremo se deduce el siguiente

Corolario: $\mathbb{Q}$ no es un conjunto completo.

Estudiaremos ahora algunas de las propiedades que se deducen como consecuencia de la propiedad de completitud de los números reales.

Recordemos que entonces todo conjunto no vacío acotado superiormente admite un supremo, más aún, este elemento es único, el siguiente teorema nos permitirá poder caracterizar a este elemento.

Teorema (caracterización del supremo): Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Un número c es el supremo de A si y solo si cumple las siguientes condiciones:

i) c es cota superior de A.
ii) Para cualquier valor real de ε positivo existe $a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a$.

Demostración: Para esto será necesario probar dos implicaciones. Veamos primero que si $c = \sup(A)$ entonces c cumple i) y ii):

Sabemos que por ser el supremo c es la mejor de todas las cotas superiores, en particular es una cota superior de A (luego cumple i)). Para ver que satisface ii) veamos que $c - \varepsilon < c$ ya que ε es positivo, luego $c - \varepsilon$ no puede ser una cota superior de A, ya que c era la menor de todas. Entonces debe haber algún elemento $a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a$. (si no fuera así $c - \varepsilon$ sería una cota superior). Esto prueba ii) con lo cual queda demostrada la primera de las implicaciones.

Veamos ahora la implicación en sentido contrario, es decir sabiendo que existe un elemento que cumple i) y ii), veremos que este será el supremo del conjunto:

Supongamos entonces que c satisface i) y ii). Entonces ya sabemos que es cota superior (por i)) y veamos que es la menor de todas. Para esto supondremos que existe un valor d que es una cota superior de A. Si $d < c$ basta tomar $\varepsilon = c - d > 0$, pero por ii) existiría $a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a$, y como $a \in A$ tal que $c - \varepsilon = c - (c - d) = c - c + d = d$, entonces existiría $a \in A$ tal que $d < a$, lo cual contradice que d sea una cota superior de A. Con lo cual no puede suceder que $d < c$, entonces $d \geq c$ y de aquí sale que de haber otra cota superior esta debe ser mayor que c. Luego c es la menor de todas las cotas superiores de A entonces $c = \sup(A)$.Lo cual prueba la segunda implicación y termina la prueba del teorema. □

Como decíamos antes, este teorema es una caracterización del supremo, es decir que cada vez que queramos probar que un número c es supremo de un determinado conjunto A no vacío y acotado superiormente, deberemos probar que este elemento cumple las propiedades i) y ii).

Ejemplo: Dado el conjunto A, escribir A como intervalo o como unión de intervalo, graficarlo en la recta numérica. Calcular: $\sup(A)$, $\inf(A)$, y decidir si estos son máximos o mínimos.

Consideremos el conjunto dado: $A = \left\{ n/_{n^2+1} \big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

Si calculamos los primeros términos de la sucesión (*) generada por los elementos del conjunto obtenemos:

$$\left\{ n/_{n^2+1} \big/ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}, \frac{8}{65}, \frac{9}{82}, \ldots \right\}$$

No es inmediato, pero mostraremos que $\sup(A) = 1/2$ y que $\inf(A) = 0$.

Esto probablemente sea inmediato para el alumno que tenga conocimientos sobre límites (ya que esta sucesión es decreciente con límite cero). De todas maneras haremos el análisis completo:

Veamos que $\inf(A) = 0$: podemos observar primero que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ tal que $0 < a < \varepsilon$. Esto es claro por el *principio de arquimedeanidad* que nos indica que el conjunto de los números naturales no está acotado, luego como $\frac{n}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n < \varepsilon\left(n^2+1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n^2+1}{n} = n + \left(\frac{1}{n}\right)$, pero esta última condición se satisface trivialmente ya que independientemente de cual sea el valor de $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N} / \frac{1}{\varepsilon} < n$ y por lo tanto $\frac{1}{\varepsilon} < n + \left(\frac{1}{n}\right)$. (Al final de este capítulo se enuncia el teorema de caracterización del supremo que permite justificar teóricamente este proceder).

Volviendo teníamos que: para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A / 0 < a < \varepsilon$ luego hemos obtenido que el ínfimo del conjunto no puede superar a cero. Entonces $\inf(A) \leq 0$. Veamos que no es posible que sea $\inf(A) < 0$, ya que podemos encontrar un elemento x ajeno a A, que sea mayor que el ínfimo (basta tomar $x = 0$). Finalmente obtenemos que $\inf(A) = 0$. Y como $\inf(A) \notin A$, este conjunto no posee mínimo.

Veamos ahora que $\sup(A) = \frac{1}{2}$, esto es obvio ya que si fuera $\sup(A) > \frac{1}{2}$, dado un $\varepsilon > 0$ y tomando $\sup(A) = \frac{1}{2} + \varepsilon$, podemos encontrar $x = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ que cumple que $\frac{1}{2} < x < \sup(A)$, y $x \notin A$, lo cual es absurdo. Y tomando $\sup(A) < \frac{1}{2}$, basta tomar $x = \frac{1}{2}$, y ver que $\sup(A) < x$ con $x \in A$, lo cual también es absurdo. Por lo tanto tenemos que $\sup(A) = \frac{1}{2}$. Y en este caso como $\sup(A) \in A$, este resulta ser un máximo del conjunto.

Se deja como ejercicio para el lector completar el ejercicio realizando el gráfico del conjunto en la recta. (Tener en cuenta que los puntos de este conjunto son puntos aislados)

(*) estudiaremos más adelante con mayor detalle estos elementos matemáticos

Veamos ahora otras consecuencias importantes de la completitud. El resultado que se enuncia a continuación formaliza un hecho bastante trivial que es que el conjunto de los números naturales no esté acotado superiormente. Este Teorema conocido como el *Principio de Arquimedeanidad* o *Principio de Arquímedes*, tiene consecuencias muy importantes en el análisis matemático. Veremos posteriormente reformulaciones de este mismo principio.

Teorema (Principio de Arquimedeanidad): Para cualquier número real a, existe un número natural n tal que $n > a$.

Demostración: Supongamos que esto no fuera así, entonces para cualquier número natural n, resultaría que $n \leq a$, lo cual es equivalente a decir que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está acotado superiormente (más aún, estamos afirmando que a es una cota superior). Como el conjunto $\mathbb{N}$ no es vacío (pues el elemento $1 \in \mathbb{N}$) por la propiedad de completitud podemos afirmar que admite un número real $c = \sup(\mathbb{N})$. Por el teorema anterior, para todo $\varepsilon > 0$ debe existir un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - \varepsilon < n$. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, en particular podemos tomar $\varepsilon = 1$. Entonces tenemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$, entonces $c < n + 1$, pero esto es un absurdo ya que como $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$ y entonces c no sería una cota superior de $\mathbb{N}$ lo cual contradice que $c = \sup(\mathbb{N})$. □

Observar que como se muestra al comienzo de la demostración anterior este hecho es equivalente a que el conjunto $\mathbb{N}$ no este acotado superiormente, lo cual era bastante previsible. Luego obtenemos el siguiente corolario que no es más que una reformulación del teorema anterior.

Corolario: El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no admite una cota superior.

Corolario: Si ε es un número real positivo, entonces existe un número natural n tal que $1/n < \varepsilon$.

Demostración: este resultado es inmediato, ya basta aplicar el teorema anterior tomando $a = 1/\varepsilon$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = 1/\varepsilon < n$, pasando de términos obtenemos lo deseado. □

Posiblemente uno de los resultados más importantes que se desprenden del principio de arquimedeanidad o de la propiedad de completitud, es el próximo teorema, que nos dice que entre dos números reales cualesquiera, siempre podemos encontrar un número racional.

Teorema (densidad de $\mathbb{Q}$): Dados a y b dos números reales cualesquiera tales que $a < b$, podemos afirmar que existe un número racional r tal que $a < r < b$.

Demostración: Esta demostración talvez resulte ser un poco más técnica que las anteriores y será efectuada en varias etapas, se recomienda que sea leída más de una vez para una mejor comprensión.

Para comenzar supondremos que $0 < a < b$. Llamemos entonces $\varepsilon = b - a$, es decir, ε representa la distancia entre a y b. Por el corolario anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Consideremos ahora un conjunto $A = \left\{ m \in \mathbb{N} / m. 1/n > a \right\}$, o sea los valores naturales m que son mayores que $a.n$. Luego es claro que $\frac{m}{n}$ es número racional y como los valores de A satisfacen que $\frac{m}{n} > a$, buscaremos un valor de m suficientemente chico como para no pasarnos de b, ya que queremos un racional entre a y b. Como $A \subset \mathbb{N}$, es decir, es un subconjunto de los naturales, entonces existe un número que es el menor de todos, digamos que

$m = \min(A)$, y veamos que $\frac{m}{n}$ está entre a y b. Ya sabemos que $\frac{m}{n} > a$ porque $m \in A$, por ser $m = \min(A)$. Además $\frac{m}{n} < b$, ya que si no fuera sí sería $\frac{m}{n} \geq b$, de donde:

$(m-1).\frac{1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$, o sea que $(m-1).\frac{1}{n} > a$ con lo cual $m-1 \in A$, lo cual sería contradictorio ya que $m-1 < m = \min(A)$. Luego $a < \frac{m}{n} < b$, con lo cual probamos la primara parte.

Los casos restantes son considerablemente más sencillos.

Supondremos ahora $a < 0 < b$, pero esto es inmediato ya que 0 es racional.

Veamos que pasa si $0 = a < b$. En este caso, existe un valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b$. Como $1/n$ es positivo y es racional queda probado este caso.

Resta ver los casos $a < b < 0$ y $a < b = 0$, que serán dejados como ejercicio. El primero ellos es muy similar al ultimo caso demostrado ya que multiplicando por -1 obtenemos que $0 < -b < -a$, y procedemos como antes. En el último de los casos procedemos de la misma manera, multiplicando por -1 y aplicamos lo obtenido para el primero de los casos. Y con esto queda probado el teorema. □

4 - Sucesiones

En el capítulo 2 estudiamos a las funciones en general, dedicaremos este capítulo al estudio de un tipo particular de funciones. Trabajaremos con funciones definidas sobre los naturales, es decir, su dominio será $\mathbb{N}$. A este tipo de funciones las llamaremos sucesiones.

Notar que en realidad lo que estamos haciendo es crear una relación entre el conjunto de los naturales y un conjunto B (el codominio), que generalmente será el conjunto $\mathbb{R}$. Por ser función sabemos que a cada natural le corresponde un único valor de la imagen, en definitiva, esta regla de asignación que estamos definiendo no es más que una forma de numerar los elementos de la imagen.

$$\begin{aligned} f(1) &= b_1 \\ f(2) &= b_2 \\ &\vdots \\ f(n) &= b_n \end{aligned}$$

Como a cada elemento b_i de $Im(f) \subseteq B$ le corresponde un número natural $i \in \mathbb{N}$ tal que $f(i) = b_i$, entonces diremos que b_i es el i-ésimo elemento de la sucesión. Esto nos da una nueva forma de representar las sucesiones:

b_1 , b_2 , … , b_i , … , b_n , … donde b_1 representa el primer término, es decir $f(1)$, b_2 el segundo, b_i el i-ésimo, b_n el n-ésimo, etc.

Debería ser evidente para el lector que esta tira de elementos (sucesión de elementos) es infinita, ya que corresponde uno por cada número natural

Definición: Definimos una sucesión como una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donde a cada elemento $f(n)$ lo llamamos a_n, notaremos a las sucesión como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ejemplo consideremos la sucesión dada por la siguiente regla $f(n) = a_n = 1/(n^2+n)$. Los términos correspondientes serían $1/2, 1/6, 1/12, 1/20, \dots$

Término general

Llamamos término general de la sucesión a la expresión genérica, que nos permite determinar cuál es la regla de asignación. Es decir, en el caso anterior, el término general es $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, esta expresión nos permite generar todos los términos de la sucesión tan solo reemplazando la variable n por la posición de término que se desee calcular. Esto es, que si se desea calcular el término 137, éste será $\frac{1}{137^2+137}$.

Notar que no basta conocer los primeros 10 ni 100 ni 1000 términos de la sucesión para generar los restantes, necesitaremos inevitablemente conocer un patrón, o una fórmula para crearlos y esta es exactamente el término general. De todas maneras, esta es una práctica usual, muchas veces conociendo los primeros términos de una sucesión podemos deducir un patrón y así obtener el término general y de esta manera poder generar la sucesión en su totalidad. Veamos algunos ejemplos de esto:

Ejemplos: Deducir el término general de las siguientes sucesiones:

i) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$. En este caso no es difícil notar que los denominadores corresponden a los cuadrados de los números naturales, entonces el término general será $a_n = \frac{1}{n^2}$.

ii) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36} \ldots$. En este caso como los signos son alternantes deberemos colocar un factor que asigne el signo correcto. Notar que los signos "–" (menos) aparecen en los términos pares, luego $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

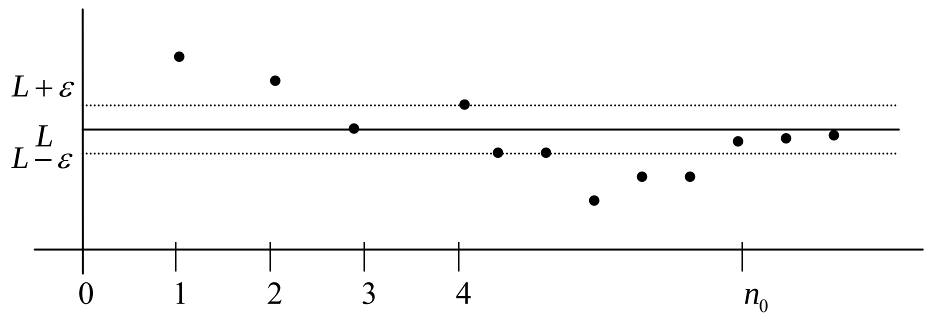
iii) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \ldots$. Observar que en este caso los términos impares son exactamente el valor que le corresponde a su posición, mientras que los pares son los inversos multiplicativos de éstos. Diremos entonces que el término general está dado por $a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$, este tipo de definición del término general se llama definición por casos.

Propiedad del límite y convergencia

En esta sección trataremos un tema central en el estudió de las sucesiones y es además una de las bases del análisis matemático. Introduciremos aquí la noción de límite.

Definición: Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0\ \ |a_n - L| < \varepsilon$.

Gráficamente el límite representa, en caso de existir, el valor al cual se va aproximando la sucesión a medida que los índices de los términos crecen, notar que la definición dice que: llamamos L al límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para todos los "valores grandes" de n (esto es $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$) la distancia entre el supuesto límite y los valores de la sucesión es muy pequeña ($|a_n - L| < \varepsilon$, el valor ε indica el tamaño de la distancia, como debe cumplirse para cualquier valor de ε, ya que dice $\forall \varepsilon > 0$, obliga a que a medida que el valor de n crece a_n se acerque a L).



En algún sentido, al hablar de límites finitos, podemos decir que los valores de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se acumulan cerca de L a medida que el valor de n crece. O de otra manera, decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L .

Es posible también que la sucesión no se acumule cerca de ningún valor real. Pero que aun así los términos se comporten de forma "buena", es decir que los valores absolutos tiendan a agrandarse cada vez más. Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito positivo, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si $\forall M > 0,\ \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0,\ a_n > M$. Se dice que tiene límite infinito negativo, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si $\forall m < 0,\ \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0,\ a_n < m$.

Definición: Si $L \in \mathbb{R}$, entonces se dice que la sucesión converge a L .
Si $L = \infty$ (positivo o negativo) se dice que la sucesión diverge.
Si no existe el límite (ni finito ni infinito) se dice que la sucesión es oscilante.

Veamos ahora un ejemplo de sucesiones para cada uno de los casos de la definición anterior:

Ejemplos:

i) Un ejemplo de sucesión convergente: Considerar $a_n = \frac{1}{n}$, si bien aún no tenemos todas la herramientas para demostrar lo afirmado, el lector puede (debería poder) convencerse de que la sucesión escogida converge. Más aún converge a cero (Usar principio de arquimedeanidad)

ii) Un ejemplo de sucesión divergente: Considerar $a_n = n$, nuevamente como en el caso anterior, el lector debería poder ver que como esta sucesión toma los valores correspondientes a los números naturales equivalentes a sus índices, el valor del límite será infinito porque el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Nuevamente el principio de arquimedeanidad nos permite afirmar esto)

ii) Un ejemplo de sucesión oscilante: Considerar $a_n = (-1)^n$, nuevamente nos encontramos faltos de herramientas para demostrar que esta sucesión no converge, pero el lector debería poder ver que como la sucesión toma el valor 1 en todos los términos pares y -1 en todos los impares, es de esperar que los valores de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no se acumulen entorno de un único punto. Notar que la distancia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre 2, luego tomando $\varepsilon = 1$ podemos ver que no se cumple la definición de límite (no existe un valor n_0 como el buscado en la definición).

Como decíamos antes, al decir que la sucesión converge estamos diciendo que valores de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se acumulan cerca de L, observar que estamos hablando de los valores de la imagen de función asociada a la sucesión. Es decir que los valores que toma la sucesión se acercan cada vez más a L.

Podemos considerar el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ formado por todos los valores que toma la sucesión, y sobre este aplicar todos los conocimientos adquiridos en el capítulo 3. Daremos ahora una definición de *sucesión acotada*. Que se corresponde directamente con la idea de *conjunto acotado*.

Definición: Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada inferiormente si $\exists\, m > 0$ tal que $a_n \geq m\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Análogamente se dice acotada superiormente si $\exists\ \mathrm{M} > 0$ tal que $a_n \leq \mathrm{M}\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Si las dos anteriores se cumplen simultáneamente decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada (a secas).

Proposición: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión son equivalentes:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente (superiormente)

ii) el conjunto $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$ es acotado inferiormente (superiormente)
Demostración: Se deja como ejercicio para el lector. □

El siguiente teorema nos dice que si una sucesión converge, entonces el valor al cual converge, o sea su límite, es único.

Teorema (unicidad del límite): Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L\in\mathbb{R}$ y su límite es único.
Demostración: Sabemos que como la sucesión converge, entonces tiene límite y éste es un valor real, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = L\in\mathbb{R}$. Razonaremos de la siguiente manera, supondremos que hay dos valores posibles $L_1, L_2\in\mathbb{R}$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, y mostraremos que $L_1 = L_2$.
Sea $\varepsilon>0$ cualquiera, por la definición de límite y lo anterior sabemos que existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq n_1$, $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$. Análogamente existe otro valor existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq n_2$, $|a_n - L_2| < \varepsilon/2$. Tomemos ahora un valor n que sea mayor que n_1 y que n_2. Entonces obtenemos lo siguiente: $|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$
$\leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| = |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Entonces tenemos que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ y como esto vale cualquiera sea $\varepsilon>0$, entonces $|L_1 - L_2| = 0$, entonces queda probado que $L_1 = L_2$.
Se deja como ejercicio para el lector convencerse de que si un número real r es tal que $r<\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$, entonces $r=0$, y tomando $r = L_1 - L_2$ sale lo anterior. □

Proposición: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$, entonces $\exists n_0$ tal que $a_n \neq a\ \forall n\geq n_0$.
Demostración: Idea: (Razonado por el absurdo) Supongamos que el consecuente no es cierto y llegaremos a un absurdo. Decir que no es cierto el consecuente es equivalente a decir que para cualquier n_0 existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $a_m = a$, y como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n\geq n_0$, en particular para m, luego $|a - L| = |a_m - L| < \varepsilon$, entonces $a = L$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, lo cual genera un absurdo. □

Ejemplo:

i) Calcular el límite de $a_n = \dfrac{2}{n^2}$ y demostrarlo por definición.

Primero podemos observar que la sucesión a_n decrece más rápido que $b_n = \dfrac{2}{n}$ (ya que $n \le n^2$ para cualquier natural), entonces uno esperaría que el límite fuera menor o igual que el límite de c_n, y como todos los valores de a_n son positivos entonces afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Para demostrar esto hay que ver que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tal que $\forall n \ge n_0$ $|a_n - L| < \varepsilon$. Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tal que $\forall n \ge n_0$ $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$ de lo cual sale que $\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} < n$, entonces deberíamos tomar $n_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} + 1$ y como $n \ge n_0$ se cumple lo deseado.

Aquí se ve claramente que el valor de $n_0 = n_0(\varepsilon)$ depende de la elección de ε.

ii) Calcular el límite de $a_n = \dfrac{2}{n+n^2}$. Calcularemos este límite de manera intuitiva (el uso de la intuición es muy importante en la matemática). Veamos primero que $n + n^2 \ge n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ luego $\dfrac{1}{n+n^2} \le \dfrac{1}{n}$, entonces sería razonable pensar que si a_n converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Por otro lado como la sucesión a_n es siempre positiva entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

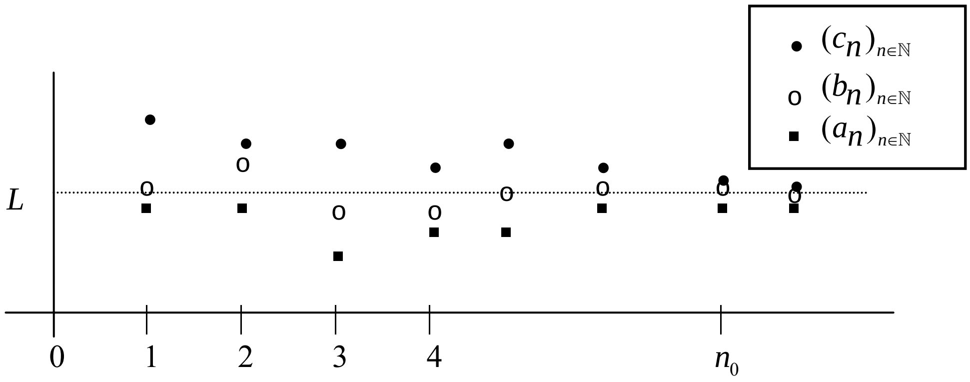
Entonces no nos queda otra que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

El próximo teorema formaliza la idea de los ejercicios anteriores.

Teorema (del sándwich): Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ y $a_n \le b_n \le c_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe un natural $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_1$, $|a_n - L| < \varepsilon$, y existe otro valor existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_2$, $|c_n - L| < \varepsilon$. Entonces si tomemos ahora un valor n que sea mayor que n_1 y que n_2 (podemos tomar n mayor o igual que $n_3 = máx\{n_1, n_2\}$) obtenemos que: $L - b_n \le L - a_n \le |L - a_n| = |a_n - L| < \varepsilon$ y $b_n - L \le c_n - L \le |c_n - L| < \varepsilon$. Y de aquí sale que $L - b_n < \varepsilon$ y que $b_n - L < \varepsilon$, entonces $|L - b_n| < \varepsilon$. Luego mostramos que existe un valor $n_3 = máx\{n_1, n_2\}$ tal que para todo $n \geq n_3$ vale que $|L - b_n| < \varepsilon$, esto es la definición de límite, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. □

Una interpretación geométrica de este teorema mostraría que si se quiere estudiar la convergencia de una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se tienen dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que encierren a la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una por arriba y la otra por debajo, y que además sus límites coinciden, entonces como los valores de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están en el medio, el límite de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser otra que el mismo que el las otras dos sucesiones.



Ahora estamos en condiciones de formalizar las ideas de los ejemplos anteriores. Mostremos entonces que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$. Esto es bastante fácil ahora. Consideremos dos sucesiones: $b_n = 0$ (es la sucesión constantemente nula) y $c_n = \frac{2}{n}$. Además se verifica que $b_n \leq a_n \leq c_n$. Y por el teorema anterior obtenemos que como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$

Álgebra de límites

En esta sección veremos como operar con sucesiones y cómo se comportan al tomar límites.

Teorema (Álgebra de Límites): Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, entonces valen los siguientes resultados:

- $\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.a$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = a.b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = a/b$, si $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$

Demostración: Probaremos primero que $\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.a$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante: Sabiendo que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$, acotemos la distancia $|ka_n - ka| = k\, |a_n - a| < k\varepsilon = \varepsilon'$ como ε' es arbitrario entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.a$.

Probemos que $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$: Sabiendo que $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists n_1$ tal que para todo $n \geq n_1$, $|a_n - a| < \varepsilon_1$, y que $\forall \varepsilon_2 > 0$, $\exists n_2$ tal que para todo $n \geq n_2$, $|b_n - b| < \varepsilon_2$, acotemos la distancia $|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$. Luego, hemos mostrado que se cumple lo deseado.

Los casos restantes serán omitidos ya que las demostraciones son técnicas y no contienen más ideas que las anteriores. De todas maneras el lector debería estar capacitado para poder reproducirlas, teniendo en cuenta las ideas anteriores. Para ver las pruebas completas consultar en la bibliografía [1CDIN]. □

Ejemplo: Supongamos que se desea calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{n^2+n}+2}{\dfrac{3n^3-1}{n^3+n}}$, veamos de qué manera podemos partir esta tarea en tareas más simples, y luego juntar todo nuestro trabajo usando el teorema anterior. Ya sabemos, por ejercicios anteriores que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = 0$, intentemos entonces calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-1}{n^3+n}$, pero nuevamente este cociente podemos partirlo en dos cocientes cuyos límites son más fáciles de calcular. Como $\dfrac{3n^3-1}{n^3+n} = \dfrac{3n^3}{n^3+n} - \dfrac{1}{n^3+n}$, calcularemos entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{n^3+n}$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n^3+n}$. Para calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{n^3+n}$ usaremos un truco frecuente (tomar factor común) ya que en este caso tenemos que salvar una *indeterminación (del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$")*:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3(1+\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}} = 3$. Notar que este último paso usamos el álgebra de límites ya que como sabíamos que $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, o sea converge, y todo los demás elementos que intervienen convergen por ser constantes entonces el límite total es el cociente entre el límite del numerados y del denominador, que a su vez éste es suma de dos límites de sucesiones convergentes.

Calculemos ahora $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^3+n}$: consideremos dos sucesiones: $a_n = 0$ (constantemente nula, que converge a cero) y $a_n = \frac{-1}{n^3}$ (el lector a esta altura debería poder probar por definición que converge a cero). Además es claro que $\frac{-1}{n^3+n} \le a_n = 0$ y por otro lado como $n^3+n \ge n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3} \ge \frac{1}{n^3+n} \Rightarrow b_n = \frac{-1}{n^3} \le \frac{-1}{n^3+n}$ obtenemos que $b_n \le \frac{-1}{n^3+n} \le a_n$.

Aplicando el teorema del sándwich, podemos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^3+n} = 0$.

Ahora aplicando álgebra de límites (segundo caso) como las dos sucesiones convergen es decir los límites $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3+n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^3+n}$ existen, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-1}{n^3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3+n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^3+n} = 3$

Recapitulando: queríamos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{3n^3-1}{n^3+n}} + 2$, y llegamos a que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-1}{n^3+n} = 3$, y como el denominador no se anula y su límite es finito y no nulo, usando nuevamente álgebra de límites (quinto caso) obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{3n^3-1}{n^3+n}} = 0$. Como acabamos de probar que esta sucesión converge y la sucesión constantemente igual a 2 también converge (y lo hace a 2), nuevamente usando el segundo caso del álgebra de límites, podemos afirmar que $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{3n^3-1}{n^3+n}} + 2 = 2.$

Hemos usado en el ejemplo anterior otras herramientas como que $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^3+n} = 0$. Extenderemos, para casos como este, el álgebra de límites a valores infinitos.

Teorema (Álgebra de Límites para valores infinitos): Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones. Entonces valen los siguientes resultados:

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$

- $\lim_{n\to\infty} k.a_n = sg(k)\infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante (donde $sg(k)$ representa el signo de k (*))
- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = sg(b)\infty$ (siempre y cuando $b \neq 0$)
- $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = sg(b)\infty$, si $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ $b_n \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty} b_n / a_n = 0$, si $b \neq 0$

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \in \mathbb{R}$

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = indeterminación$
- $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = indeterminación$
- $\lim_{n\to\infty} b_n / a_n = indeterminación$

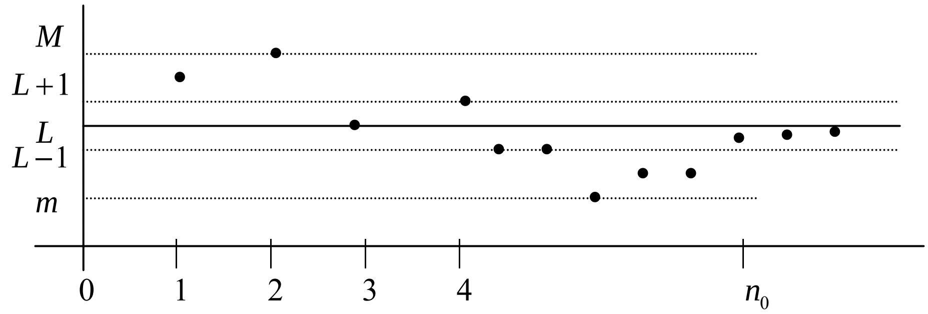
(Veremos en la próxima sección qué es una indeterminación)

(*) La función signo se define como $sg(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \\ -1 & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$ la función signo representa el signo de la variable *k*, asignándole 1, -1 ó 0 según corresponda.

Teorema: Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. O sea $\forall\varepsilon < 0$, $\exists n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$, de lo cual obtenemos que $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$, y finalmente $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$. Como por definición esto está valiendo para todo $\varepsilon < 0$, entonces vale para $\varepsilon = 1$. Hemos obtenido que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $L-1 < a_n < L+1$, es decir pudimos acotar la cola de la sucesión. Sólo nos falta poder mostrar que podemos también acotar los primeros n_0 términos. Pero esto es obvio, ya que como son finitos, podemos tomar como cota superior al mayor de todos ($M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$) y como cota inferior al mínimo de todos ($m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$), entonces la sucesión queda encerrada. Pode debajo la podemos acotar por el menor entre m y $L-1$, y por arriba por el mayor entre M y $L+1$. Luego la sucesión es acotada. □

El siguiente gráfico ilustra la idea de la demostración.



Indeterminaciones

En el ejemplo de la sección anterior nos topamos con un problema que lo denominamos como una *indeterminación del tipo* "$\frac{\infty}{\infty}$", veremos en esta sección qué es una indeterminación, y cuáles son los posibles tipos de indeterminaciones. Además extenderemos al álgebra de límites para los casos infinitos.

Cuando se calcula un límite de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que viene dada, por ejemplo, por un cociente ($a_n = {}^{b_n}\!/_{c_n}$), donde el numerador $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una valor $b \in \mathbb{R}$ y el denominador $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$, entonces el álgebra de límites nos permite afirmar que la sucesión converge a ${}^{b}\!/_{c}$, y para poder afirmar esto no es siquiera necesario conocer explícitamente de qué sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trata. (En algún sentido, podemos operar sin necesidad de estudiar este caso particularmente). Pero, ¿qué pasa si las sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tuvieran límites infinitos? ¿Cuál es el valor del límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Aquí comienza el problema, podría pasar cualquier cosa. Mostraremos ejemplos de sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límites infinitos y donde el límite del cociente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toma valores distinto en cada caso, o bien, ni siquiera existe este límite.

Ejemplos:

i) Consideremos $b_n = 3n$, $c_n = n$, y notemos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Entonces si $a_n = {}^{b_n}\!/\!{}_{c_n}$ resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n} = 3$. Si hubiéramos definido $b_n = kn$, con $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$, tendíamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{kn}{n} = k$, es decir cualquier valor real no nulo.

ii) Consideremos: $b_n = n$, $c_n = n^2$, y notemos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Si definimos como antes $a_n = {}^{b_n}\!/\!{}_{c_n}$ resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

iii) Consideremos: $b_n = {}^{(-1)^n}\!/\!{}_{n}$, $c_n = {}^{1}\!/\!{}_{n}$, como $d_n = {}^{-1}\!/\!{}_{n} \leq b_n \leq c_n$ y sabemos que c_n converge a cero, por el teorema del sándwich afirmamos que b_n también converge a cero. Veremos que "$\frac{0}{0}$" este también un tipo de indeterminación. Así definimos $a_n = {}^{b_n}\!/\!{}_{c_n}$, no sólo podemos conseguir casos como los anteriores, sino que, peor aún, puede ni siquiera existirle límite del cociente. Calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{{}^{(-1)^n}\!/\!{}_{n}}{{}^{1}\!/\!{}_{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ y ya vimos que este límite no existe.

Definición: Decimos que el cálculo de un límite es una indeterminación si no se puede conocer cuál será su resultado sin apelar al estudio del caso particular del que se trata. Estos son casos en los cuales no podemos aplicar el álgebra de límites inmediatamente.

Veamos ahora cuáles son los tipos de indeterminaciones posibles:

Indeterminaciones:

i) del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n}$.

ii) del tipo "$\frac{0}{0}$". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/_{n+1}}{3/_{n^2}}$.

iii) del tipo "$0.\infty$". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n}.(n+1)$.

iv) del tipo "$\infty-\infty$". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3}$.

v) del tipo "1^∞". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

vi) del tipo "∞^0". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

vii) del tipo "0^0". Por ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1/_{\sqrt[n]{n}}$.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que efectivamente se trata de indeterminaciones. Esto significa que para cada uno de los tipo antes enunciado hay que encontrar ejemplos de sucesiones (al menos dos) que tengan límite distintos o una converja y otra que no, tal como se hizo en el primer ejemplo de la sección para el caso "$\frac{\infty}{\infty}$".

Veremos en lo que resta del capítulo, algunos métodos para poder salvar estas indeterminaciones, es decir, poder solucionar este problema de incertidumbre del límite y calcular los límites deseados.

Sucesiones monótonas

Definición: Una sucesión se dice creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se dice decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo valor de $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión cumple es de cualquiera de estos dos tipos, diremos que se trata de una sucesión monótona.

Teorema: Toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, monótona y acotada es convergente.

Demostración: Consideraremos el conjunto $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada entonces A es acotado y entonces por la completitud de los números reales podemos afirmar que existen $s=\sup(A)$ y $i=\inf(A)$ ($i=-\sup(-A)$). Además como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona entonces es creciente o decreciente. Supongamos que es creciente, y veamos que tiene límite. Como $s=\sup(A)$, entonces por la característica del supremo sabemos que para todo

$\varepsilon > 0$ existe $a_{n_0} \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_{n_0}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para $n \geq n_0$, tenemos que $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ y por ser $s = \sup(A)$ tenemos que $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$ y además $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s + \varepsilon$, esto dice que $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$. Entonces hemos llegado a que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que para todo $n \geq n_0$, $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$, o sea $|a_n - s| < \varepsilon$. Esto último dice que la sucesión converge a s. Para el caso en que la sucesión sea decreciente, se repite el mismo procedimiento, pero esta vez considerando $i = \inf(A)$. □

Pero, ¿qué pasa si la sucesión no es acotada? Notemos entonces que si la sucesión es monótona entonces será creciente o decreciente, en el primer caso tomará valores cada vez mayores y como no es acotada entonces no podremos fijar una cota superior M para el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Es decir, existe n_0, tal que para cualquier $n \geq n_0$, $a_n \geq M$, lo cual nos dice que la sucesión tiene límite $+\infty$. Para el caso en que sea decreciente se repite el razonamiento anterior. Esto se formaliza con el siguiente teorema.

Teorema: Toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, monótona y no acotada tiene límite $+\infty$ (si es creciente) y $-\infty$ (si es decreciente).
Demostración: Se deja como ejercicio formalizarla (basadas en las ideas del párrafo anterior) □

Subsucesiones y teorema de Bolzano-Weierstrass

Ya hemos visto algunas herramientas para calcular límites de sucesiones, y más adelante veremos algunos resultados que harán esta tarea más fácil. Pero no tenemos hasta ahora un método efectivo para probar que una determinada sucesión no posee límite (ni finito ni infinito). Veremos en esta sección una herramienta de gran valor para lograr esto último.

Consideremos para comenzar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Es de esperar que como todos los valores de la sucesión se acumulan cerca del límite a medida de que el valor de n crece, entonces si uno escoge de la sucesión original un subconjunto de los elementos, estos también se estarían acumulando cerca del mismo límite. Es decir si, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L entonces todos los elementos de $A = \{a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \ldots, a_n, \ldots\}$ están cerca de L. Luego si se extrae cualquier subconjunto de A, sus elementos también estarán cerca de L. Esto nos dice que si una sucesión converge y uno extrae términos de ella (esto es obtener una *subsucesión* de la sucesión original), esta nueva sucesión converge también, y más aún, converge al mismo valor que la sucesión original. Esto motiva la definición de subsucesión y el siguiente teorema:

Definición: Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, decimos que $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$: $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ es una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mas formalmente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una composición $a\circ n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ donde $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente. Llamamos $n_k = n(k)$ de lo cual sale que $a_{n_k} = a_n(k) = a(n(k)) = (a\circ n)(k)$.

Teorema: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, con límite L (podría ser $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente con límite infinito). Entonces toda subsucesión $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y lo hace al mismo límite L.

Pensemos ahora en el contra recíproco del razonamiento anterior. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que no posee límite. Para fijar ideas consideremos la sucesión $a_n = (-1)^n$, la cual, como ya fue explicado antes, toma el valor 1 si n es par y -1 si n es impar.

Observemos que si nos quedamos solamente con los términos pares obtenemos una sucesión que vale constantemente 1, a la cual la llamaremos la *subsucesión de los términos pares* y si nos quedamos con los impares obtenemos una sucesión que vale constantemente -1, a la cual la llamaremos la *subsucesión de los términos impares*. Hemos aquí obtenido dos Subsucesiones convergentes, que convergen a distintos límites, pero esto muestra que la sucesión original no puede converger, ya que si convergiera, el límite sería único, y las dos Subsucesiones obtenidas deberían tener el mismo límite.

Entonces, ¿cómo mostramos que una sucesión no tiene límite? Deberíamos poder conseguir dos subsucesiones que converjan a valores distintos. Veamos un ejemplo de esto:

Ejemplos:

i) Mostraremos que la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene límite. Bastaría para ello encontrar dos subsucesiones de la anterior que converjan a valore distintos. Tomemos $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, la subsucesión de los pares y $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ la de los impares. Como $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, entonces converge a 1, y $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = -1$, entonces converge a -1.

ii) Mostraremos ahora que la sucesión $a_n = sen\left(n\pi/2\right)$ no tiene límite. Debemos construir dos subsucesiones con distintos límites. Tomemos $a_{4n} = sen\left(4n\pi/2\right) = 0$, que converge a cero, y

$a_{4n+1} = sen\left(4n\pi + \frac{1}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ que converge a 1. (Queda como ejercicio para el lector llenar los detalles faltantes).

Enunciaremos a continuación un lema que nos servirá para probar el teorema que le da nombre a esta sección.

Lema (de los puntos panorámicos): Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos extraer una subsucesión monótona $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: Diremos que a_m es un punto panorámico de la sucesión si para todo $n > m$, $a_m > a_n$. Intuitivamente esto dice desde a_m en adelante todos los valores son menores que él. (Notar que si todos los puntos son panorámicos entonces la sucesión es decreciente).

Notemos que puede darse dos situaciones: Primero, que haya infinitos puntos panorámicos. En este caso tomaremos un valor n_1 tal que a_{n_1} sea un punto panorámico. De esta forma $a_{n_1} > a_n$ para todo $n > n_1$. Como hay infinitos puntos panorámicos tomamos $n_2 > n_1$ tal que a_{n_2} sea un punto panorámico. Notemos que $a_{n_1} > a_{n_2}$. De esta forma, como hay infinitos puntos panorámicos, repitiendo este procedimiento podemos construir una subsucesión decreciente $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}} : a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots > a_{n_k} > \ldots$, que es justamente la subsucesión monótona que buscábamos.

El segundo caso se corresponde con el hecho que haya sólo un número finito de puntos panorámicos. Como hay un número finito, a partir de un cierto valor n_1 no encontramos más puntos panorámicos. Esto quiere decir que no hay valores que sean mayores que todos los siguientes. Como a_{n_1} no es panorámico luego podemos encontrar un valor $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} \le a_{n_2}$, pero claramente a_{n_2} tampoco puede ser panorámico, entonces podemos tomar un valor $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_2} \le a_{n_3}$, y prosiguiendo como hasta ahora podemos construirnos una subsucesión creciente $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}} : a_{n_1} \le a_{n_2} \le a_{n_3} \le \ldots \le a_{n_k} \le \ldots$, que es justamente la subsucesión monótona que buscábamos. □

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema.

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, entonces posee una subsucesión $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Demostración: Por el lema anterior podemos construirnos una subsucesión monótona $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$. Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces es evidente que la subsucesión $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Tenemos entonces que la subsucesión $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada. Y sabemos que toda sucesión con estas condiciones es convergente (ver sección anterior). Con esto queda probado el teorema. □

Ejemplo importantes (límites especiales)

Dedicaremos esta sección a generar herramientas que nos permitirán salvar algunos tipos de indeterminaciones.

Trataremos primero las correspondientes al tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Consideremos el ejemplo dado: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n}$. ¿Cómo logramos eliminar la variable del numerador? Un procedimiento común suele ser sacar factor común tanto en el numerador como en el denominador, con el objetivo de poder eliminar la variable deseada. Esto sería $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1}$. Ahora sólo resta resolver un límite conocido, donde se puede aplicar el álgebra de límites. Por un lado tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ en el numerador, y claramente el denominador diverge, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n} = 0$.

¿Podría entonces decirse que el método para solucionar indeterminaciones del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" es sacando factor común y luego operar algebraicamente para poder aplicar el álgebra de límites? Sí, en general este procedimiento funciona de maravilla.

Pasemos ahora al segundo tipo de indeterminaciones, las del tipo "$\frac{0}{0}$". Notemos primero que cualquier indeterminación de este tipo se puede transforma inmediatamente en una indeterminación del tipo anterior. En algún sentido podríamos decir que un "0" es de la forma "$\frac{1}{\infty}$". Dicho de otra manera podríamos rescribir la indeterminación "$\frac{0}{0}$" como "$\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$", lo cual equivaldría a una indeterminación del tipo anterior. Es importante aclara que este manejo algebraico que se acaba de hacer con las indeterminaciones no es más que un abuso de notación, es claro que nadie va a pasar dividiendo ni multiplicando un cero o un infinito, so se escribe así para ilustrar la idea de *rescribir la indeterminación de un tipo en otro*. Hagamos esto con el siguiente ejemplo: $\lim_{n\to\infty}\frac{1/_{n+1}}{3/_{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)}$, que no es más que una indeterminación del tipo anterior, la cual ya sabemos resolver.

Notar que este mismo proceder se aplica alas indeterminaciones del tipo "$0.\infty$", que puede rescribirse como indeterminaciones del tipo "$\frac{1}{\infty}.\infty$", lo cual equivale a una indeterminación del primer tipo.

Las indeterminaciones del tipo "$\infty-\infty$" también puede ser rescrita en su mayoría como indeterminaciones del primer tipo, veamos un ejemplo. Aplicaremos para esto un método algebraico que se conoce como multiplicar por el conjugado. Supongamos que se quiere calcular $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3}$, llamaremos conjugado de $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3}$ a la expresión $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}$, y operaremos de la siguiente manera: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3})\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}}$, observemos qué tenemos en el numerador, aplicando la regla distributiva llegamos a que $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3})\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-3)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}}$, notemos que ahora ni el numerador ni el denominador son indeterminaciones, ya que $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)-(n^2-3)=\lim_{n\to\infty}n-1=\infty$ y $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3}=\infty$ por ser una suma de infinitos positivos. Hemos entonces obtenido una indeterminación del primer tipo, tal como queríamos.

Veremos ahora como tratar las indeterminaciones de la forma "1^∞", estas no siempre se puede rescribir como algunas de las de los tipos anteriores. Para resolver alguno de los casos más típicos apelaremos a un teorema cuya demostración no será dada. Pero si el lector desea, puede verla en la bibliografía [1CDIN].

Teorema: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$. En particular tomando $a_n=n$ se obtiene $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

Notemos que el límite del teorema, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ corresponde uno del tipo "1^∞". Como para entender como resolver una indeterminación de este tipo usando el teorema anterior resolveremos el siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+3n-2}\right)^{3n-1}$. Para comenzar observemos que el límite de la base es 1, mientras que el del exponente es infinito, con lo cual estamos en las condiciones que esperábamos. Tratemos mediante métodos aritméticos elementales conseguir una expresión como la buscada.

$$\frac{n^2+n}{n^2+3n-2}=1+\frac{n^2+n}{n^2+3n-2}-1=1+\frac{(n^2+n)-(n^2+3n-2)}{n^2+3n-2}=$$

$$=1+\frac{-2n+2}{n^2+3n-2}=1+\frac{1}{\frac{n^2+3n-2}{-2n+2}}.$$ Obtenemos de esta manera lo siguiente: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+3n-2}{-2n+2}}\right)^{3n-1}$, para obtener en el exponente lo deseado multiplicaremos y dividiremos por lo que se pretende tener, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+3n-2}{-2n+2}}\right)^{\frac{n^2+3n-2}{-2n+2}}\right]^{\frac{-2n+2}{n^2+3n-2}.(3n-1)}.$$

Aplicando el teorema anterior a la parte interior a los corchetes, obtenemos que su límite es el número e. Por otro lado, en el numerador, obtenemos una indeterminación del primer tipo. Calculando llegamos a que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n+2}{n^2+3n-2}.(3n-1)=-6$. Finalmente por el álgebra de límites con los límites obtenidos recién tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+3n-2}\right)^{3n-1}=e^{-6}$.

Antes de estudiar las indeterminaciones de la forma "∞^0", veremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=+\infty$ si $r>1$. Sea $a_n=\frac{r^n}{n}$, veamos primero que esta sucesión es creciente, a partir de algún n_0. Para ello veremos cuándo el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{r^{n+1}}{n+1}}{\frac{r^n}{n}}=\frac{nr}{n+1}$. Pero $\frac{nr}{n+1}>1 \Leftrightarrow nr>n+1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{r-1}$. Luego es creciente tomando valores de $n>\frac{1}{r-1}$. Entonces por ser monótona existe el límite (finito o infinito positivo). Queremos ver que es infinito, así que supondremos que es infinito y llegaremos a una contradicción: $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=L<+\infty$. Entonces desarrollando según la definición tenemos que: $\frac{\lim_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty}a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nr}{n+1}=r>1$, y por el otro lado $\frac{\lim_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty}a_n}=\frac{L}{L}=1$, luego 1<1, lo cual es evidentemente un absurdo. Entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=+\infty$.

Ejercicio: Se deja como ejercicio para el lector demostrar que $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ si $r<1$.

Consideremos la siguiente sucesión: $a_n=\sqrt[n]{n}$. Es claro que $1=\sqrt[n]{1}<\sqrt[n]{n}$. Y si podemos ver que $1=\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon=r$ habremos visto que su límite es 1. Operando obtenemos que $1\le\sqrt[n]{n}<r \Leftrightarrow n<r^n \Leftrightarrow 1<\frac{r^n}{n}$. Lo cual es cierta por el resultado anterior para todos los n a partir de algún n_0.

Así como vimos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, también se puede demostrar que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\text{polinomio en función de } n}=1$. Por ejemplo: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^{12}+7n^2-3n+1}=1$.

Estos resultados sirven para tratar los límites de los dos últimos tipos.

Veamos ahora otros teoremas muy importantes a la hora de calcular límites.

Teorema (cero por acotado): Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas tal que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, entonces $\lim_{n\to\infty}a_n.b_n=0$.

Demostración: Queremos probar que $\lim_{n\to\infty}a_n.b_n=0$, sabiendo que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, y que $-M<(b_n)_{n\in\mathbb{N}}<M$, luego $|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}|<M$. Sabemos que para todo $\varepsilon>0$, existe un valor n_0, tal que para todo $n\ge n_0$, $|a_n|<\varepsilon$. Luego acotemos

$|a_n.b_n| = |a_n|.|b_n| < |a_n| M < \varepsilon M = \varepsilon'$, entonces tenemos que para todo $\varepsilon' > 0$, existe un valor n_0, tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n.b_n| < \varepsilon'$ (donde $\varepsilon M = \varepsilon'$), lo cual muestra que $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$. □

Veamos un ejemplo de cómo se aplica esto.

Calculemos $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n^2+n)}{\sqrt{n}}$, podemos ver fácilmente que $\frac{1}{\sqrt{n}} sen(n^2+n)$ es un producto de dos sucesiones: una con límite cero, y la otra acotada. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, ya que si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = L$, entonces por el álgebra de límites como $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$ $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = L^2$, entonces $L^2 = 0 \Rightarrow L = 0$. Claramente $-1 \leq sen(n^2+n) \leq 1$. Luego por el teorema anterior $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n^2+n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Veremos ahora un último teorema, que también será una herramienta para calcular límites. La demostración de este teorema no se dará, si el desea leerla puede consultar la bibliografía [1CDIN] o [2NRSSFEC].

Teorema: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(a_n)}{a_n} = 1$

Veamos algún ejemplo de aplicación de este teorema.

Ejemplo: Calculemos el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{3n^2+n}\right)}{sen\left(\frac{1}{7n^2-n}\right)}$. Intentemos llevarlo a la forma adecuada para poder aplicar el teorema anterior:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(1/(3n^2+n))}{sen(1/(7n^2-n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(1/(3n^2+n))}{sen(1/(7n^2-n))} . \frac{3n^2+n}{3n^2+n} . \frac{7n^2-n}{7n^2-n}$$

Reagrupando obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(1/(3n^2+n))}{sen(1/(7n^2-n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(1/(3n^2+n))}{\frac{1}{3n^2+n}} . \frac{\frac{1}{7n^2-n}}{sen(1/(7n^2-n))} . \frac{3n^2+n}{7n^2-n}.$$

Estudiemos cada cociente por separado: Por el teorema anterior tanto el primero como el segundo cociente convergen a 1, mientras que el tercero es una

indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Calculando obtenemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{7n^2-n}=\frac{3}{7}$.
Luego aplicando el álgebra de límites tenemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{sen(1/(3n^2+n))}{sen(1/(7n^2-n))}=\frac{3}{7}$.

Sucesiones dadas por recurrencia

Concluiremos con el capítulo correspondiente a sucesiones estudiando sucesiones descritas de una forma que no fue mencionada anteriormente. Hasta ahora hemos visto que las sucesiones se pueden describir mostrando su término general y muchas veces, podemos conociendo tan sólo algunos términos de la sucesión predecir cómo se comportará. Otra forma que describir el comportamiento de una sucesión es de forma recurrente, esto es: *describir el n-ésimo término de la sucesión en función de alguno (o algunos) de los anteriores*.

Para fijar ideas, pensemos en un ejemplo muy elemental:

Ejemplo: La sucesión se define como: $a_0=2$, $a_n=2.a_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Esto nos indica que el primer término toma el valor 2, y que un término cualquiera toma el valor equivalente al doble del anterior. Surgen aquí algunas preguntas: ¿por qué es necesaria poner cuanto vale el primer término? ¿Cómo calculo cuanto vale un término determinado, por ejemplo el término a_5? Respondamos primero la segunda y caerá de maduro la respuesta de la primera. Si miramos la definición de $a_n=2.a_{n-1}$ podemos deducir que $a_5=2.a_{5-1}=2.a_4$ (basta tomar $n=5$ y reemplazar). Pero a su vez a_4 está definido recurrentemente. Con lo cual $a_5=2.a_4=2.(2.a_3)$, y como a_3 también está definido recurrentemente se sigue que $a_5=2.a_4=2.(2.a_3)=2.(2.(2.a_2))$. Este proceso se continúa hasta $a_5=2.a_4=\ldots=2.(2.(2.(2.(2.a_0))))$. Aquí se ve la importancia de a_0, tenemos que reemplazar por $a_0=2$. Notemos entonces que $a_5=2.(2.(2.(2.(2.a_0))))=2.2.2.2.2.2=2^6$, y por el mismo procedimiento que el anterior se deduce $a_4=2.(2.(2.(2.a_0)))=2.2.2.2.2=2^5$. Propongamos entonces, mirando casos de a_4 y a_5, que $a_n=2^{n+1}$ (si el lector necesita más casos, es fundamental que los desarrolle). Notar además que se verifica que $a_0=2^{0+1}=2$.

Veamos ahora un ejemplo un poco más complicado:

Ejemplo: Consideremos la sucesión definida por: $a_0=-2$, $a_n=3.a_{n-1}+2.\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Desarrollemos algunos términos para comprender su comportamiento:

$a_1 = 3.a_{1-1} + 2.\sqrt{1} = 3.(-2) + 2.1$

$a_2 = 3.a_{2-1} + 2.\sqrt{2} = 3.(3.(-2) + 2.1) + 2.\sqrt{2} = 3.3.(-2) + 3.2.1 + 2.\sqrt{2}$

$a_3 = 3.a_{3-1} + 2.\sqrt{3} = 3.(3.(3.(-2) + 2.1) + 2.\sqrt{2}) + 2.\sqrt{3} = 3.3.3.(-2) + 3.3.2.1 + 3.2.\sqrt{2} + 2.\sqrt{3}$

$\vdots$

Rescribamos el término a_3 de forma tal que nos sea más fácil deducir el término general.

$a_3 = 3.3.3.(-2) + 3.3.2.1 + 3.2.\sqrt{2} + 2.\sqrt{3} = 3^3.(-2) + 3^2.2.\sqrt{1} + 3^1.2.\sqrt{2} + 3^0.2.\sqrt{3}$,

escribamos el término $a_4 = 3^4.(-2) + 3^3.2.\sqrt{1} + 3^2.2.\sqrt{2} + 3^1.2.\sqrt{3} + 3^0.2.\sqrt{4}$ (se deja como ejercicio par el lector desarrollar el cuarto término y llegar a la expresión anterior). ¿Podemos ahora deducir cómo serán los términos sucesivos? Sí, podemos intentarlo, notemos que el primer sumando del término a_n siempre es de la forma $3^n(-2)$. En cuanto a los demás, podemos ver que hay n sumandos en el cual, el exponente del 3 decrementa su valor y el argumento de la raíz cuadrada se incrementa. En general escribiremos:

$a_n = 3^n.(-2) + 3^{n-1}.2.\sqrt{1} + 3^{n-2}.2.\sqrt{2} + \ldots + 3^1.2.\sqrt{n-1} + 3^0.2.\sqrt{n}$. Usando la notación con sumatorias introducida en el capítulo 2 escribiremos: $a_n = 3^n.(-2) + \sum_{i=1}^{n} 3^{n-i}.2.\sqrt{i}$. Verificar que $a_0 = -2$, y que se verifica para todos los casos desarrollados.

A continuación desarrollaremos otro ejemplo, en el cual no calcularemos su término general, sino que mostraremos la importancia que tiene que haya una expresión como la anteriormente calculada.

Ejemplo: Consideremos la sucesión definida como: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2.a_n + a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Notar que la recurrencia depende ahora de los términos anteriores, entonces es de esperar que el término a_2 dependa de a_1 y a_0. Esto muestra que la importancia de definir *dos casos bases*. Desarrollando (para valores de n grandes) obtenemos que:

$$a_{n+1} = 2.\underbrace{(2.a_{n-1} + a_{n-2})}_{a_n} + \underbrace{2.a_{n-2} + a_{n-3}}_{a_{n-1}},$$

$$a_{n+1} = 2.\underbrace{(2.(2.a_{n-2} + a_{n-3}) + (2.a_{n-3} + a_{n-4}))}_{a_n} + \underbrace{2.(2.a_{n-3} + a_{n-4}) + (2.a_{n-4} + a_{n-5})}_{a_{n-1}} =$$

$$= 2.2.2.a_{n-2} + 2.2.a_{n-3} + 2.2a_{n-3} + 2.a_{n-4} + 2.2.a_{n-3} + 2.a_{n-4} + a_{n-5}$$

Notar que en este caso la recurrencia comienza a hacerse cada vez más complicada. Es importante que el lector note que si este cálculo lo tuviera que hacer uno a mano, sería una tarea enormemente larga, incluso para cuando el valor de n no es tan grande, por ejemplo tomar $n = 5$, y obtenemos la siguiente expresión: $a_6 = 2.2.2.a_3 + 2.2.a_2 + 2.2a_2 + 2.a_1 + 2.2.a_2 + 2.a_1 + a_0$.

Reemplazando los valores conocidos por las hipótesis: $a_6 = 2.2.2.a_3 + 2.2.a_2 + 2.2a_2 + 2.1 + 2.2.a_2 + 2.1 + 1$. Y aún falta desarrollar algunos términos.

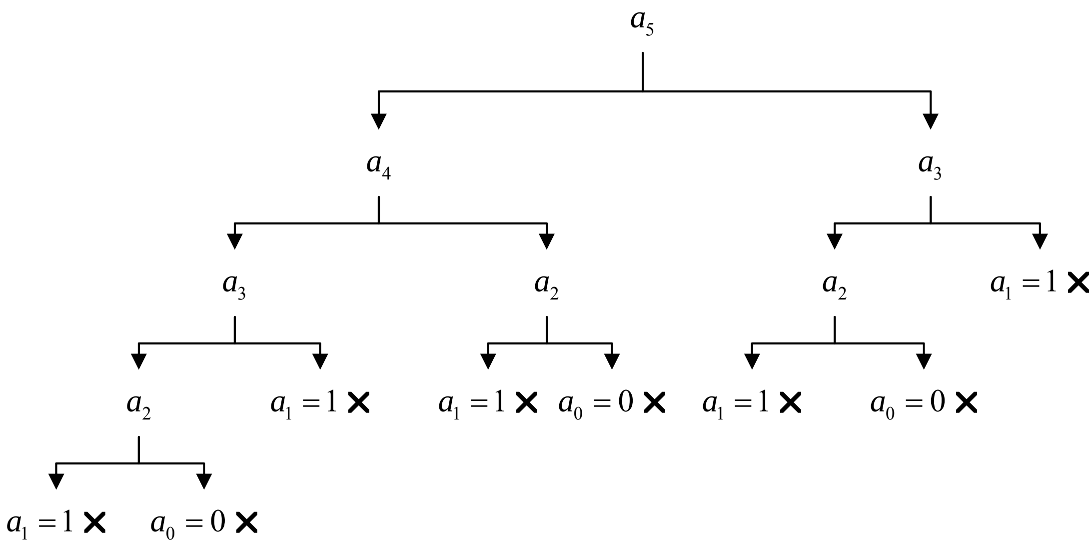
Supongamos entonces que decidimos pasarle esta espantosa tarea de cálculo a una computadora. Si volvemos a mirar la fórmula: $a_{n+1} = 2.2.2.a_{n-2} + 2.2.a_{n-3} + 2.2a_{n-3} + 2.a_{n-4} + 2.2.a_{n-3} + 2.a_{n-4} + a_{n-5}$, notamos que incluso en una etapa del desarrollo muy temprana (sólo hicimos unos pocos reemplazos), estamos calculando varios valores más de una vez, es decir, la computadora calculará a_{n-2}, para lo cuál necesitará calcular a_{n-3} y a_{n-4}, y luego en el segundo y tercer sumando volverá a calcular a_{n-3} para lo cual volverá ser necesario calcular a_{n-4}. Por supuesto que en la práctica existen método que permiten *eliminar la recursión en una sucesión*, lo cual nos permite tener un algoritmo más eficiente para el cálculo. Dejemos de lado el enfoque computacional, ¿Qué significa esto desde un punto de vista matemático? ¡Simple! Es importante eliminar la recurrencia en una sucesión, es decir, será importante, siempre que se pueda, obtener el término general.

Mostraremos a continuación otro ejemplo de sucesión muy conocido:

Ejemplo (sucesión de Fibonacci): la sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente, lineal (esto quiere decir que si se reemplazan la llamada a los términos anteriores por la variable x, el polinomio obtenido tiene grado 1). Se define como: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Se generan de esta forma los términos:

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\ldots$

Desarrollemos un árbol dónde se muestren los cálculos necesarios para obtener el quinto término de la sucesión.



Podemos observar en el árbol anterior que el cálculo del quinto término de la sucesión de Fibonacci, involucra el cálculo de a_4, dos veces el cálculo de a_2, tres veces el de a_3, y evaluar un total de 8 veces los casos bases, lo cual hace que el proceso de cálculo de los términos de la sucesión sea sumamente costoso. Lo cual confirma lo expuesto en el ejemplo anterior.

5 - LÍMITE DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

En este capítulo generalizaremos nociones vistas en los capítulos anteriores, estudiaremos las propiedades de los límites pero sobre funciones más generales, es decir para funciones reales cualesquiera. Las funciones que consideraremos son las estudiadas en el capítulo 2, y combinaciones de ellas, y contamos con la teoría desarrollada en el capítulo 3 sobre la completitud de los números reales, la densidad de los números racionales, y el principio de arquimedeanidad.

Límites en el infinito

Análogamente a lo hecho para sucesiones definiremos el concepto de límite en el infinito de la siguiente forma.

Definición: Una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tiene límite $L\in\mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ si $\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in\mathbb{R}$ tal que $\forall x\geq x_0\ \ |f(x)-L|<\varepsilon$.

Así como en el estudio de límites para sucesiones, en el estudio de límites de funciones nos centraremos en adquirir herramientas para poder salvar las indeterminaciones que aparezcan. Y veremos en el capítulo siguiente una herramienta muy poderosas para poder salvar las indeterminaciones del tipo "$\frac{0}{0}$" y "$\frac{\infty}{\infty}$".

Definición: Decimos que el cálculo de un límite es una indeterminación si no se puede conocer cuál será su resultado sin apelar al estudio del caso particular del que se trata. Estos son casos en los cuales no podemos aplicar el álgebra de límites inmediatamente (el lector ya está familiarizado con el álgebra de límites para sucesiones y veremos que se extiende sin problemas para el estudio de límites de funciones).

Veamos ahora cuáles son los tipos de indeterminaciones posibles:

Indeterminaciones:

i) del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+x}$.

ii) del tipo "$\frac{0}{0}$". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x+1}{3/x^2}$.

iii) del tipo "$0.\infty$". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+x}.(x+1)$.

iv) del tipo "$\infty-\infty$". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3}$.

v) del tipo "1^∞". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

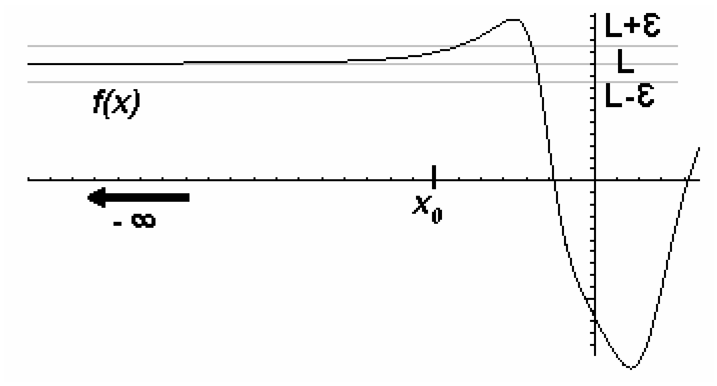
vi) del tipo "∞^0". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

vii) del tipo "0^0". Por ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} 1/\sqrt[x]{x}$.

Nuevamente dejamos deja como ejercicio para el lector verificar que efectivamente se trata de indeterminaciones. Esto quiere decir que para cada uno de los tipo antes enunciados hay que encontrar ejemplos de sucesiones (al menos dos) que tengan límite distintos o una converja y otra que no, tal como se hizo en para el estudio de indeterminaciones en el capítulo 4.

Introduciremos a esta altura el primer concepto novedoso del capítulo. Era evidente en el capítulo anterior que cuando tomábamos un límite infinito este límite tenía que ser indefectiblemente un límite con *n* tendiendo a infinito positivo, ya que los valores que alcanzaba la variable *n* eran valores naturales. Pero en el estudio actual los límites dependen del valor de la variable *x*, que bien podría moverse por todo el conjunto de los números reales. Imagínense que tenemos una función definida como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y queremos estudiar su comportamiento cuando tomamos valores muy negativos. Es claro que este planteo no tiene sentido en el estudio de sucesiones. De esta manera introducimos el concepto de límite hacia infinito negativo.

Definición: Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene límite $L\in\mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ si $\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in\mathbb{R}$ tal que $\forall x\le x_0\ \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$.



Definición: Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene límite infinito positivo, es decir, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ si $\forall M>0,\ \exists x_0$ tal que $\forall x\geq x_0, f(x)>M$. Se dice que tiene límite infinito negativo, es decir, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ si $\forall m<0,\ \exists x_0$ tal que $\forall x\geq x_0,\ f(x)<m$.

Veremos aún así algunos ejemplos del cálculo de límites.

Ejemplos: Calcular los siguientes límites

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(2-1/x)}{x(3+2/x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-1/x}{3+2/x}=\dfrac{2}{3}$.

Observemos que el cálculo de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}$ es idéntico al anterior ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}1/x = \lim\limits_{x\to+\infty}2/x = \lim\limits_{x\to-\infty}1/x = \lim\limits_{x\to-\infty}2/x = 0$. Luego $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{2}{3}$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\dfrac{|x|+1}{x}-1}$. Intentemos aplicar el álgebra de límites tal como la conocemos para sucesiones. Por un lado $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|+1}{x}=1$ ya que x toma valores positivos. Luego el denominador tiene límite cero. Entonces el cociente tiende a infinito. Pero ¿será infinito positivo o negativo? Analicemos con más cuidado el límite calculado, como siempre vale que $|x|+1>x$ entonces $\dfrac{|x|+1}{x}>1$ cuando x>0, y entonces tenemos que si bien $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|+1}{x}=1$ podemos además afirmar que nos acercamos al valor 1 por los mayores que 1, lo notaremos agregando un signo + como "exponente del 1”: $\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|+1}{x}=1^+$, entonces tenemos que $\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|+1}{x}-1=0^+$, y como el numerador es siempre positivo, obtenemos que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{|x|+1}{x}-1}=+\infty$.

Analicemos $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{|x|+1}{x}-1}$. Veamos primero qué pasa con el denominador.

Calculemos $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+1}{x}$: Por la definición de la función módulo $\left(f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}\right)$ debemos reemplazar *x* por –*x* y obtenemos que $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x}=-1$, luego $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+1}{x}-1=-2$, con lo cual se obtiene que $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{|x|+1}{x}-1}=-1$.

Como se puede observar el procedimiento para calcular límites a más o menos infinito es muy similar, y no varía mucho de lo estudiado en el capítulo anterior. Los procedimientos para salvar indeterminaciones también se copian y se aplican al calculo de límites funciones.

Veremos ahora que también se obtienen resultados similares a los del capítulo anterior, que son de gran importancia a la hora de calcular límites.

Teorema (cero por acotado): Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones acotadas tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x).g(x)=0$. Y análogamente si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x).g(x)=0$.

Demostración: Queremos probar que $\lim_{x\to\infty} f(x).g(x)=0$, sabiendo que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, y que $-M<f(x)<M$, $\forall x\in\mathbb{R}$, luego $|f(x)|<M$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Sabemos que para todo $\varepsilon>0$, existe un valor x_0, tal que para todo $x\geq x_0$, $|f(x)|<\varepsilon$. Luego acotemos $|f(x).g(x)|=|f(x)|.|g(x)|<|f(x)|M<\varepsilon M=\varepsilon'$, entonces tenemos que para todo $\varepsilon'>0$, existe un valor x_0, tal que para todo $x\geq x_0$, $|f(x).g(x)|<\varepsilon'$ (donde $\varepsilon M=\varepsilon'$), lo cual muestra que $\lim_{x\to\infty} f(x).g(x)=0$.□

El lector podrá observar que esta demostración es una copia de la prueba realizada para sucesiones.

Si recordamos el ejemplo de aplicación dado para sucesiones podemos obtener un ejemplo de aplicación de este teorema para el caso de funciones.
Veamos un ejemplo de cómo se aplica esto.
Calculemos $\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x^2+x)}{\sqrt{x}}$, y tenemos que $\frac{1}{\sqrt{x}} sen(x^2+x)$ es un producto de dos funciones: una con límite cero, y la otra acotada. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (ver demostración hecha para sucesiones). Claramente $-1 \le sen(x^2+x) \le 1$. Luego por el teorema anterior $\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x^2+x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Así como sucede en el estudio de sucesiones de aquí se desprende el siguiente teorema.

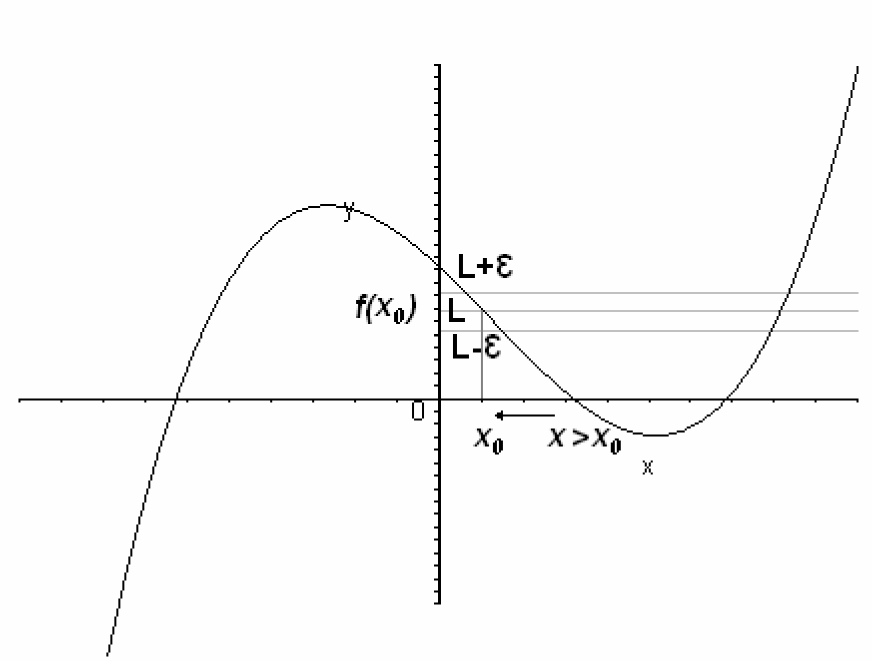
Teorema: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$. También si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$.

Para obtener un ejemplo de este teorema, basta con mirar el ejemplo dado para sucesiones

Límites en el punto

Una de las principales diferencias en el estudio de límites de funciones con el correspondiente estudio para sucesiones es la existencia de límites puntuales. Como el conjunto de los números reales es un conjunto continuo, esto es, verifica la propiedad de completitud, tiene sentido pensar en "tender" o acercarse a un determinado punto x_0 moviéndonos desde la izquierda o desde la derecha. Veamos el ejemplo que clarifique la situación.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, cuyo gráfico no presenta "saltos", es decir, la función no presenta *discontinuidades*, y tomemos un punto cualquiera, $x_0 \in Dom(f) = \mathbb{R}$. Tiene sentido preguntarse: ¿a qué valor se acerca $f(x)$ cuando nos acercamos al punto x_0? Sin querer necesariamente preguntar cuánto vale la función en el punto x_0.

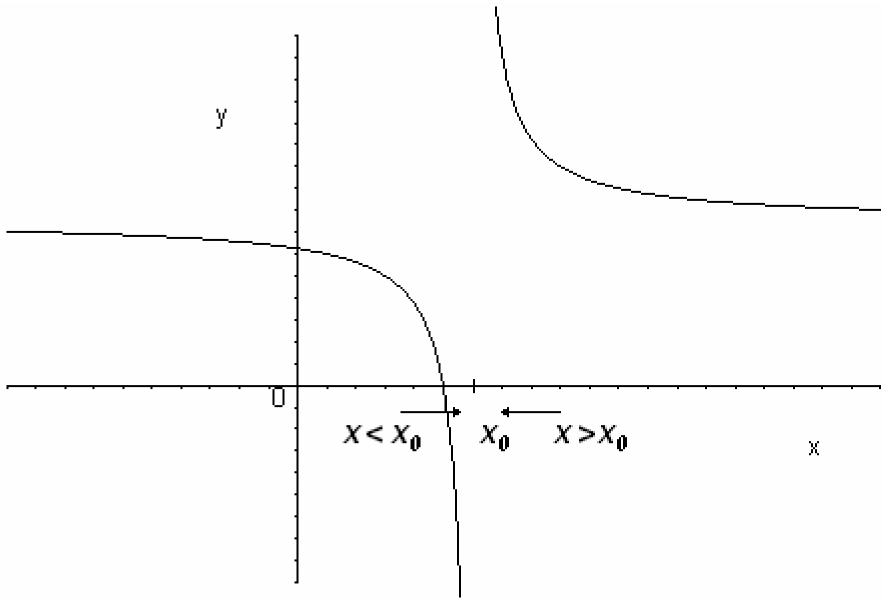


En este caso parecería sensato pensar que a medida que nos acocamos al valor x_0 (en el dominio de la función - por el eje de las X -), nos estamos acercando al valor $f(x_0)$ (en la imagen de la función - por el eje de las Y -).

Esto no parece tener mucho sentido cuando la función se comporta "bastante bien" cerca del punto al cual tendemos.

Consideremos el siguiente ejemplo, dado por una función homográfica que presenta una *discontinuidad* (un salto) en el punto x_0.

Sea $f:\mathbb{R}-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ una función cuyo gráfico es el siguiente:



Analicemos cual es el comportamiento de la función cuando nos acercamos al valor x_0. Está claro que en este caso no podemos decir que a medida que nos acocamos al valor x_0, nos estamos acercando al valor $f(x_0)$, ya que $f(x_0)$ no está definido porque $x_0 \notin Dom(f)$. Estamos en una situación en la cual no hay más alternativa que hacer el cálculo del límite "a mano".

Si observamos el gráfico con detenimiento podemos ver que el valor del límite varía dependiendo si nos acercamos a x_0 por la derecha o por la izquierda, deberemos calcular ambos *límites laterales*, para comprender el comportamiento de la función cerca del punto en cuestión.

Límites a derecha e izquierda

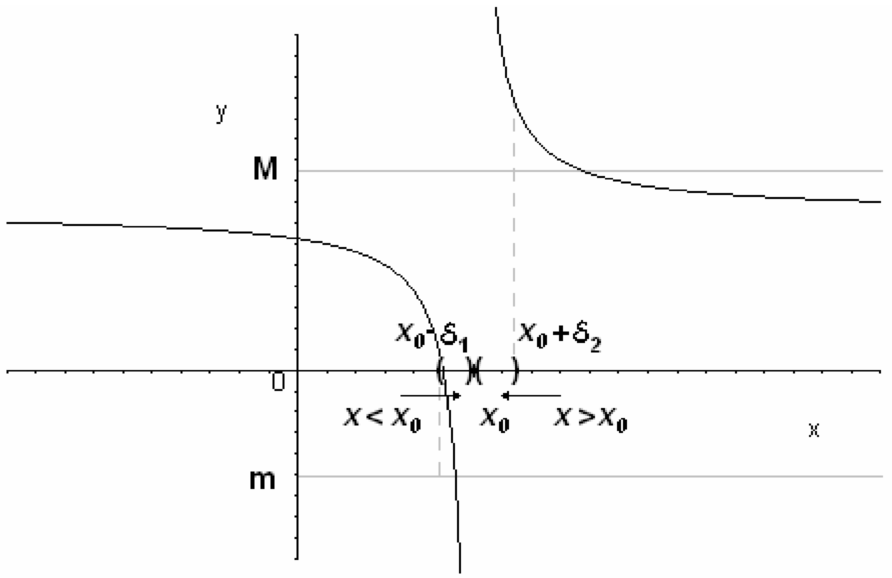
Siguiendo con el ejemplo anterior (y sumándole un poco de imaginación) podemos observar que a medida que nos acercamos a x_0 por su derecha la función toma valores cada vez mayores, mientras que si nos acercamos por su izquierda los valores son cada vez más negativos. Diremos entonces que el límite a derecha del punto x_0 será infinito positivo, mientras que el límite a izquierda del punto x_0 será infinito negativo, y lo notamos así: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Formalmente decimos:

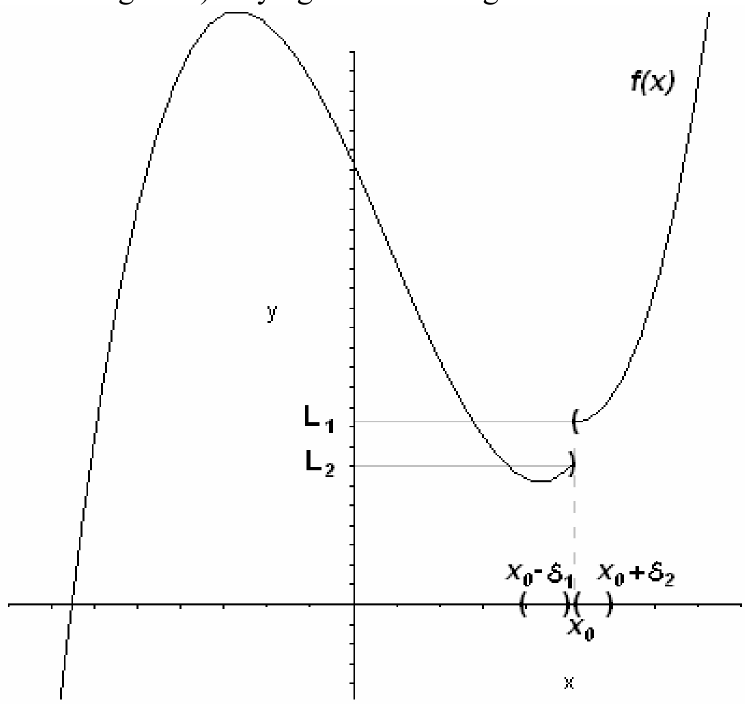
Definición: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) > M$. Análogamente decimos que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $f(x) > M$.

Definición: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si $\forall m < 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) < m$. Análogamente decimos que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\forall m < 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $f(x) < m$.

Este valor $\delta > 0$ que buscamos en la definición representa una distancia en el dominio, para la cual siempre que estemos dentro del rango pedido ($x_0 - \delta < x < x_0$ ó $x_0 < x < x_0 + \delta$), podamos asegurar que se cumple la condición buscada ($f(x) < m$ ó $f(x) > M$). Gráficamente esto se ve de la siguiente manera:



Veamos ahora un ejemplo de límite puntual en el cual los valores a los cuales uno tiende sean finitos, es decir: Consideremos una función $f:\mathbb{R}-\{x_0\}\to\mathbb{R}$, tal que los valores de los límites laterales sean finitos (no necesariamente iguales) cuyo gráfico es el siguiente:



Decimos en este caso que el límite a derecha del punto x_0 será L_1, y el límite a izquierda del punto x_0 será L_2, y lo notamos así: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$.

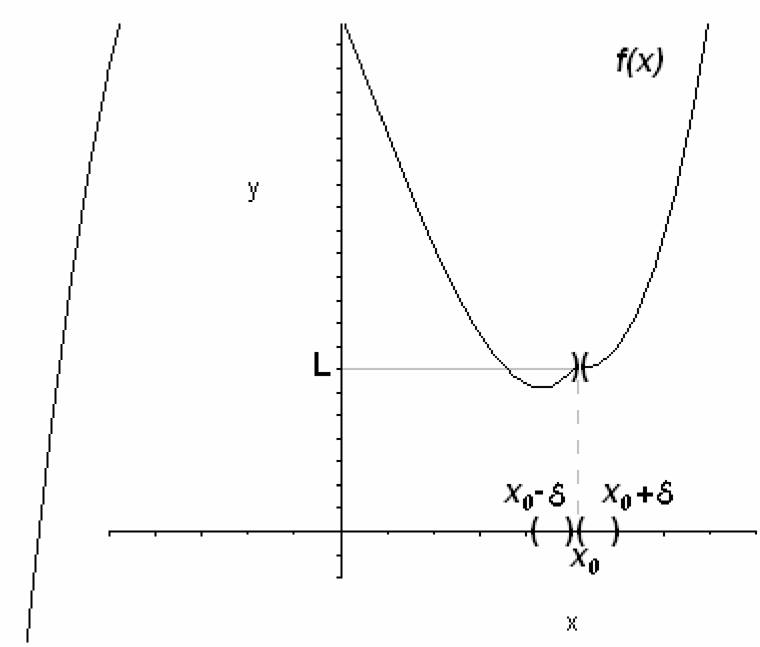
Formalmente decimos que:

Definición: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta_1$, entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon$. Análogamente decimos que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que si $x_0 - \delta_2 < x < x_0$, entonces $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

En el caso el caso en que los valores de L_1 y L_2 coincidan ($L_1 = L_2 = L$) diremos que el límite cuando x tiende a x_0 es L_1, y lo notaremos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (o sea no haremos distinción entre límite a derecha o izquierda). Formalmente decimos que:

Definición: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Notar que la condición $0 < |x - x_0| < \delta$ involucra las dos condiciones anteriores $x_0 - \delta < x < x_0$ y $x_0 < x < x_0 + \delta$. Y que la condición $|f(x) - L| < \varepsilon$ dice que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Gráficamente se ve lo siguiente:



Veamos algunos ejemplos concretos:

Ejemplos: calcular los límites laterales a x_0 de las siguientes funciones y en caso de existir calcular el límite en el punto.

i) $f(x)=2x^3$, con $x_0=-1$. Observamos primero que la función es "bastante buena" (es *continua*). Si calculamos el límite lateral derecho decimos que como $\lim\limits_{x\to -1^+} x^3=-1$, entonces $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x^3=-2$. De forma similar tenemos que $\lim\limits_{x\to -1^-} 2x^3=-2$, con lo cual podemos afirmar que existe el límite en el punto $x_0=-1$, y que $\lim\limits_{x\to -1} 2x^3=-2$.

ii) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$, con $x_0=1$. Nuevamente tenemos una función homográfica, que presenta "problemas" en $x_0=1$, ya que este valor no pertenece al dominio de la función. Si calculamos el límite lateral derecho al punto $x_0=1$, tenemos que el denominador tiende a anularse, es decir que $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0$, pero podemos saber más, como nos acercamos al valor 1 por su derecha, la variable *x* toma valore mayores que 1, con lo cual *x*-1 toma valores cercanos a 0, pero positivos, es decir que $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$, mientras que cuando tendemos por la izquierda obtenemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} x-1=0^-$. Si estudiamos el numerador de la función tenemos que $\lim\limits_{x\to 1^+} 3x-2=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x-2=1$, con lo cual el límite del cociente será infinito. En el primer caso tenemos que tanto el numerador como el denominador son positivos, mientras que en el segundo caso tenemos que el numerador es positivo, pero el denominador es negativo. De todo esto se deduce que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x-2}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x-2}{x-1}=-\infty$.

iii) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 \\ 2x+3 \end{cases}$, con $x_0=4$. Estudiemos este ejemplo, y observemos que $\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3$ y que $\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+3=5$. Este es un caso donde ambos límites laterales son finitos, distintos, luego no existe el límite en el punto.

Definición: Sea $f: A\to \mathbb{R}$ tal que ambos límites laterales existen, son finitos y coinciden (o sea $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L\in\mathbb{R}$), pero que la función no esté definida en el punto ($x_0\notin Dom(f)$) o que $f(x_0)\neq L$, entonces diremos que *f* presenta una discontinuidad evitable en x_0.

Definición: Sea $f:\mathbb{R}-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ tal que no esté definida en el punto ($x_0\notin Dom(f)$), y:

i) ambos límites laterales existen, son finitos pero no coinciden (o sea $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$),

ii) alguno de los límites laterales es infinito (en el peor de los casos ambos son infinitos), o

iii) alguno de los límites laterales no existe (en el peor de los casos ninguno de ellos existe),

diremos que *f* presenta una discontinuidad inevitable (o esencial) en x_0.

Continuidad

Hemos mencionado en el capítulo 2, qué significa intuitivamente que una función sea continua, esto era que su gráfico se podía hacer sin levantar el lápiz, es decir la función "no pega saltos". Desde aquel hasta ahora hemos desarrollado varias herramientas que nos permitirán formalizar la idea de continuidad.

Supongamos que se tiene una función *f*, y que se quiere estudiar su comportamiento en un determinado punto, llamémoslo x_0. Como no aclaramos que la función esté definida en el punto en cuestión no sería prudente calcular $f(x_0)$ ya que podría no tener sentido. Calculemos entonces ambos límites laterales, y supongamos que ambos existen, son finitos y coinciden. Sean ahora $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Si resultara que el punto $x_0 \notin Dom(f)$ o que $f(x_0) \neq L$, por lo visto antes diríamos que *f* presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0. Pero, ¿qué sucede si $f(x_0) = L$?, es decir que ambos límites coinciden con el valor que la función toma en el punto. En este caso resultará que *f* es continua en el punto x_0. Más formalmente decimos que:

Definición: Sea *f* una función definida en un entorno del punto x_0. *f* se dice continua si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Observemos que la condición "$|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" implica "$0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" y como además $x_0 \in Dom(f)$, y $f(x_0) = L$, esto implica que "$0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$" y $f(x_0) = L$. En resumen tenemos que el límite en el punto x_0 existe y coincide con $f(x_0)$. Luego tenemos las siguientes equivalencias:

Teorema: Sea *f* definida en un entorno del punto x_0. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) *f* es continua en el punto x_0 (o sea $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$),

ii) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Consideremos ahora una función *f* que presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0. Supongamos además que la función no está definida en ese punto. ¿Podremos hacer algo para que la función resulte continua en x_0? Nuevamente tomemos la definición de discontinuidad evitable, sabemos que los límites laterales en el punto x_0 coinciden, y que *f* no está definida en el punto x_0. Extendamos el dominio de la función agregando el este valor y hagamos que en x_0 tome el valor de los límites. Es decir, si se tiene que $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin A = Dom(f)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$, definimos entonces una nueva función $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, entonces resulta que $\lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y además $\tilde{f}(x_0) = L$, entonces por el teorema anterior ($iii) \Rightarrow i)$) vale que $\tilde{f}: A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, y $\tilde{f}$ coincide con *f* sobre *A*, esto último suele escribirse $\tilde{f}\big|_A = f$.

Ejemplo: Encontrar todos los posibles valores de *k* de forma tal que la siguiente función resulte continua. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 4 + 2.e^{1/x} & \text{si x} < 0 \\ 2x + k^2 & \text{si x} \geq 0 \end{cases}.$$

Primero observemos que para estudiar la continuidad de *f* (en todo su dominio), nos bastará tan sólo con ver qué sucede con la rama que la define a la izquierda del cero, a la derecha del cero y en el aquel punto.

Está bastante claro que la función $f_1(x) = 4 + 2.e^{1/x}$ no presenta problemas a la izquierda del cero, ya la función $e^{1/x}$ está bien definida sobre todos los valores negativos de *x* y luego al multiplicar por 2 y sumarle 4 esto se mantiene. Si bien esto parece muy intuitivo, formalmente estamos haciendo uso del álgebra de funciones continuas, el lector a esta altura puede imaginarse de que se trata, pero de todas maneras será explicado en la próxima sección.

Esto mismo sucede con la segunda rama, la función $f_2(x) = 2x + k^2$ por ser lineal resulta continua en todo su dominio, es decir, f_2 es continua para todos los reales *mayores que cero* independientemente del valor de *k*. ¿Por qué no podemos afirmar que la función sea continua en el cero¿ Para esto deberíamos verificar que se cumple la definición de continuidad o alguna de sus equivalencias. Por simplicidad buscaremos que los límites laterales existan, que sean finitos y que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(x_0)$.

Calculemos $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 4 + 2.e^{1/x} = 4 + 2.\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 4 + 2.0 = 4$

(Observar que nuevamente hemos usado el álgebra de límites).

Si calculamos $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x + k^2 = k^2$ lo cual coincide con $f(0) = k^2$. Es decir, queremos que $4 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0) = k^2$. Entonces pedimos $k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

Álgebra de límites y continuidad

En esta sección extenderemos el álgebra de límites para funciones, lo cual no resultará más que una copia de lo ya hecho para sucesiones:

Teorema (Álgebra de Límites): Sean $f : A-\{x_0\} \to B$ y $g : A-\{x_0\} \to C$ dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, entonces valen los siguientes resultados:

- $\lim_{x\to x_0} k.f(x) = k.l_1$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = l_1 - l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = l_1.l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = l_1/l_2,$ suponiendo que $g(x) \neq 0$ y que $l_2 \neq 0$

Teorema (Álgebra de Límites para valores infinitos): Sean $f : A-\{x_0\} \to B$ y $g : A-\{x_0\} \to C$ dos funciones. Entonces valen los siguientes resultados:

i) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0} k.f(x) = sg(k)\infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante (donde $sg(k)$ representa el signo de k)
- $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = sg(l_2)\infty$ (siempre y cuando $b \neq 0$)
- $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = sg(l_2)\infty,$ suponiendo que $g(x) \neq 0$ y que $l_2 \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} g(x)/f(x) = 0,$ si $l_2 \neq 0$

ii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \infty = indeterminación$
- $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = indeterminación$
- $\lim_{x\to x_0} g(x)/f(x) = indeterminación$

Con respecto a las funciones continuas, no podemos decir mucho más que repetir lo ya dijimos varias veces. Dado que la noción de continuidad se desprende de la noción de límite, resulta que la suma, la resta, la multiplicación, etc. De funciones continuas resultará continua. Lo formalizamos con el siguiente resultado.

Teorema (Álgebra de funciones continuas): Sean $f : A \to B$ y $g : A \to C$ dos funciones definidas en un entorno del punto x_0 y continuas en x_0. Entonces se tiene que valen los siguientes resultados:

- $k.f(x)$ es continua en x_0, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $f(x) + g(x)$ es continua en x_0
- $f(x) - g(x)$ es continua en x_0
- $f(x).g(x)$ es continua en x_0
- $f(x)/g(x)$ es continua en x_0, suponiendo que $g(x) \neq 0$ cerca de x_0

Además se verifica que:

Teorema: Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son dos funciones definidas en un entorno del punto x_0 y $f(x_0)$ y continuas en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente. Entonces la composición resulta continua en x_0

Teoremas sobre continuidad

Consideremos ahora, funciones que sean continuas en un intervalo cerrado, es decir, sea $f : A \to B$ sólo pediremos que la función *f* esté definida en el intervalo $[a,b]$, y que además resulte continua ahí adentro, notar que la continuidad en los bordes del intervalo indica que el límite por izquierda al punto *b* coincida con el valor *f(b)* (sin importarnos que sucede con el límite por derecha, *f* podría ni siquiera estar definida a la derecha de *b*). Análogamente sucede con *a*, sólo pediremos que el valor del límite por derecha coincida con la valuación en el punto, y no nos detendremos a estudiar el límite por izquierda a ese punto.

A continuación se estudiarán algunos teoremas que nos permitirán comprender el comportamiento de las funciones continuas.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función continua en el intervalo [*a*,*b*], afirmamos que *f* es acotada en todo el intervalo.
Demostración: Sea *f* continua en el intervalo [*a*,*b*], pero supongamos que nos es acotada. (Esto nos indica que o bien no es acotada superiormente o bien inferiormente). Supongamos primero que no es acotada superiormente, entonces para cualquier valor de $M > 0$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) > M$. Como esto lo podemos hacer para cada valor de *M*, tomemos $M = n$, y llamemos $x_n \in [a,b]$ al correspondiente valor de *x*, que hace que se cumpla $f(x_n) > n$. Repitiendo esto para cada número natural *n*, conseguimos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, totalmente contenida en el intervalo [*a*,*b*], con la propiedad que $f(x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces esto último nos indica que la sucesión está acotada. Y por el teorema de Bolzano-Weierstrass (ver capítulo 4) afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que tiene límite $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$, y como se verifica que $a \le (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \le b$, entonces $a \le (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \le b$, y por lo tanto $l \in [a,b]$, y entonces afirmamos que existe *f(l)*.
Por ser *f* continua en [*a*,*b*], afirmamos que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(l)$ (se deja como ejercicio para el lector convencerse de esto). De aquí se obtiene que $\left(f(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente que tiene como límite a *f(l)*. Pero por otrio lado tenemos que $f(x_{n_k}) > n_k \ge k$, entonces $\left(f(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada.
Claramente estos dos resultados son contradictorios, ya que hemos visto que toda sucesión convergente es acotada. De lo cual se obtiene una contradicción que parte de suponer que *f* no era acotada superiormente. Este mismo razonamiento se copia suponiendo que *f* no era acotada inferiormente. □

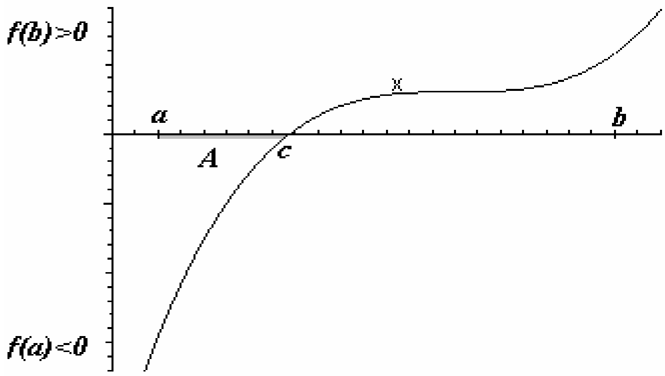
Tenemos ahora que la imagen de una función continua sobre un intervalo cerrado es acotada (y claramente no vacía), entonces por lo estudiado en el capítulo 3, existen valores llamados *supremo* e *ínfimo*, que por pertenecer al conjunto imagen decimos que son *máximos* y *mínimo* respectivamente. En los próximos teoremas será de gran importancia la propiedad de completitud de $\mathbb{R}$. Esto motiva el siguiente

Teorema (Weierstrass): Sea $f : A \to B$ una función continua en el intervalo [*a*,*b*], afirmamos que *f* alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo.

Demostración: Como f es continua en el intervalo [a,b], el conjunto $A = Im(f) = \{ f(x) / x \in [a,b] \}$ es acotado (tanto inferior como superiormente por lo que explicamos en el párrafo anterior). Llamemos: $s = \sup(A)$, $i = \inf(A)$. Debemos ver ahora que existen valores x_1, x_2 tales que $f(x_1) = s$ y $f(x_2) = i$. Supongamos que no fuera así, consideremos además la función $g(x) = \dfrac{1}{s - f(x)}$, que por nuestra suposición está bien definida ya que es el cociente de dos funciones continuas que no se anulan. Y como g es continua en un intervalo cerrado, por el teorema anterior g es acotada, es decir existe un valor M tal que $g(x) = \dfrac{1}{s - f(x)} \leq M \quad \forall x \in [a,b]$. De aquí sale que $1 \leq M\left(s - f(x)\right)$, o sea $f(x) \leq s - \dfrac{1}{M} \quad \forall x \in [a,b]$. De esto se deduce que $s - \dfrac{1}{M}$ es cota superior de *A*, lo cual contradice que s sea el supremo. Esta contradicción provino de suponer que no existía ningún valor x_1 tal que $f(x_1) = s$, entonces s es un máximo del conjunto *A*, o sea que $f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.De la misma manera se procede con x_2. Suponiendo que no existe y considerando la función $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - i}$ se llaga a una contradicción. (Se deja como ejercicio para el lector completar esta demostración) □

Es bueno que el lector que este en condiciones se habitúe a demostrar formalmente ya que en la matemática las cosas más esperadas pueden resultar falsas y las más increibles pueden resultar ciertas.

Recordemos ahora la definición informal de continuidad dada en el capítulo dos. Decíamos que una función es continua si podíamos graficarla so levantar el lápiz del papel. Por otro lado supongamos que se tiene una función continua que toma valores negativos y valores positivos. Para fijar ideas supongamos que $a,b \in Dom(f)$ y que $f(a) < 0$ y que $f(b) > 0$, intuitivamente esperaríamos que la función corte en algún lugar (entre a y b) al eje de las *X*. Lo que es mucho menos obvio es que para afirmar esto estamos usando la propiedad de completitud de los números reales. Formalizaremos a continuación este resultado y lo demostraremos con máximo detalle para que el lector pueda observar que la propiedad de completitud es indispensable. Se recomienda que se haga una lectura detenida de la demostración del teorema.



Teorema (Bolzano): Sea $f : A \to B$ una función continua en el intervalo [*a*,*b*], tal que $f(a) < 0$ y que $f(b) > 0$ (o al revés, se suele escribir $f(a).f(b) < 0$). Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración: Consideremos el conjunto formado por todos los puntos del intervalo donde la función es negativa. $A = \{x \in [a,b] / f(x) < 0\}$. Este conjunto está acotado superiormente por *b* (ya que si $x \in A \Rightarrow x \in [a,b] \Rightarrow x \leq b$), y además es no vacío ya que $a \in A$, luego (por la propiedad de completitud) existe un elemento $c = \sup(A)$. Como el conjunto *A* está totalmente incluido en el intervalo $[a,b]$ entonces $c \in [a,b]$. Queremos ver que este valor *c* es el valor buscado, es decir que $f(c) = 0$.

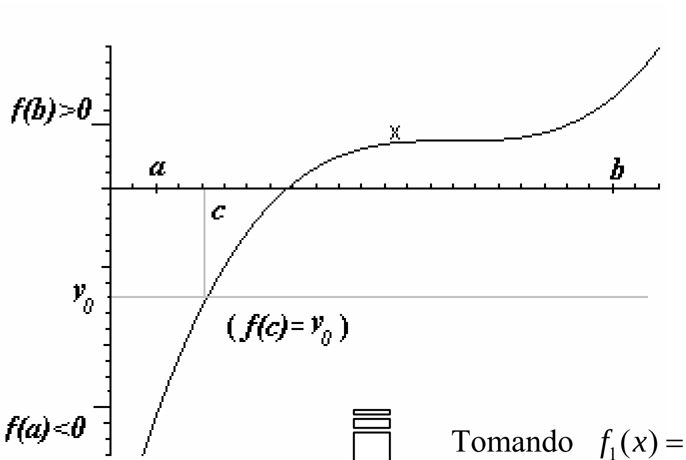
Supongamos que no. Si $f(c) < 0$, entonces afirmamos que existe un valor $\delta > 0$ (*), tal que para cualquier *x* que cumpla $c - \delta < x < c + \delta$ vale que $f(x) < 0$. Sea x_1 un elemento tal que $c < x_1 < c + \delta$, entonces $f(x_1) < 0$, entonces $x_1 \in A$. Lo cual es una contradicción ya que es un elemento de *A* y es mayor que el supremo. Si $f(c) > 0$, también afirmamos que existe un valor $\delta > 0$ tal que para cada *x* tal que $c - \delta < x < c + \delta$ se cumple $f(x) > 0$. Sea ahora x_2 un valor tal que $c - \delta < x_2 < c$. Es claro que x_2 no puede ser cota superior de *A* ya que *c* es la menor de todas, entonces existe un elemento $x_3 \in A$ tal que $x_2 < x_3 \leq c$, pero entonces como $x_3 \in (c - \delta, c + \delta)$ tenemos que $f(x_3) > 0$ y además $f(x_3) < 0$ por estar en *A*. Lo cual es absurdo. Con lo cual tenemos que $f(c) = 0$ y como $c \in [a,b]$ y $c \neq a$ ya que $f(a) < 0$ y $c \neq b$ ya que $f(b) > 0$, entonces $c \in (a,b)$, lo cual prueba el teorema. □

(*)(se deja al lector convencerse de esto, basta mirar con cuidado la definición de límite)

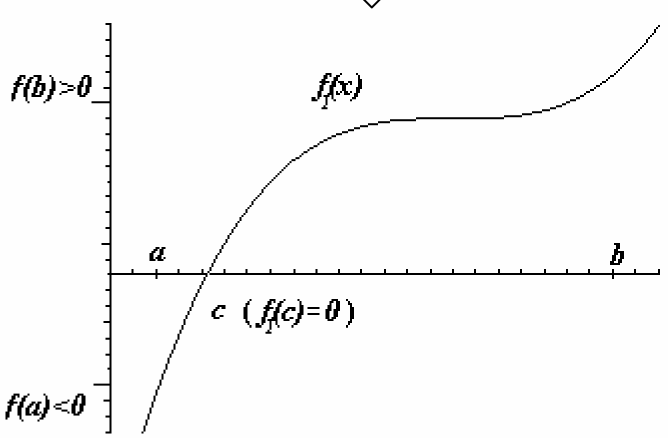
Veamos que la idea que aporta este teorema puede ser generalizada un poco más, es decir, este razonamiento puede ser trasladado horizontalmente y tenemos el siguiente corolario:

Corolario: Sea $f: A \to B$ una función continua en el intervalo [*a*,*b*], tal que $f(a) < f(b)$ (o al revés) y sea y_0 tal que $f(a) < y_0 < f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y_0$.

Demostración: Para demostrar esto no hay más que considerar la función f_1 definida sobre el mismo intervalo, tal que $f_1(x) = f(x) - y_0$ (desplazamiento de *f* y_0 puntos en sentido vertical) y aplicar el teorema de Bolzano a la función f_1. Tenemos entonces que existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $f_1(c) = 0$, luego $f_1(c) = f(c) - y_0 = 0$, entonces $f(c) = y_0$. □



Tomando $f_1(x) = f(x) - y_0$ y luego aplicando el teorema de Bolzano.



Ejemplo (Aplicación del teorema del Bolzano): Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función polinómica definida como $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$. Sabiendo que $f(3) = 0$, calcular los conjuntos de negatividad ($C_-(f)$) y positividad ($C_+(f)$) de *f*.

Primero observamos que la condición $f(3) = 0$ equivale a decir que $x - 3$ divide a *f*, y además podemos observar que de la expresión de *f* podemos extraer

un factor común, la variable *x*. Obtenemos de esta manera una expresión más factorizada de *f*: $f(x) = x(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) = x.(x-3)(\text{algo de grado 2})$.
Determinemos cuál es la cuadrática restante, mediante una simple división de polinomios:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & x-3 \\ \cline{3-3} & x^3 - 3x^2 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} & \quad - & -4x + 12 \\ & & -4x + 12 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Obtenemos entonces que $f(x) = x.(x-3)(x^2-4)$ y por ser una diferencia de cuadrados sabemos que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, con lo cual obtenemos que *f* se escribe como: $f(x) = x.(x-3)(x-2)(x+2)$ y queda claro que las raíces de *f* son $\{-2,0,2,3\}$. Veamos cómo se aplica el teorema de Bolzano. Sabemos que la función entre raíz y raíz, no corta el eje de las *X*, y usando el contrarecíproco del teorema de Bolzano, que dice:

Teorema de Bolzano (contrarecíproco): Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y no contiene ningún cero en el intervalo $[a,b]$, entonces *f* es positiva o negativa en el intervalo (pero no puede ser ambas).

Esto nos dice que en los intervalos restantes $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(3,\infty)$, la función sólo puede ser positiva o negativa. Para determinar es cuál de los dos casos estamos, vasta tomar un punto en cada intervalo y el signo del valor de la valuación en el punto nos determinará el signo de *f* en todo el intervalo:

$$\begin{array}{ccccc} -3 \in (-\infty,-2) & f(-3) = 90 > 0 & \Rightarrow & f \text{ es positiva en } (-\infty,-2) \\ -1 \in (-2,0) & f(-1) = -12 < 0 & \Rightarrow & f \text{ es negativa en } (-2,0) \\ 1 \in (0,2) & f(1) = 6 > 0 & \Rightarrow & f \text{ es positiva en } (0,2) \\ 2{,}5 \in (2,3) & f(2{,}5) \approx -2{,}8 < 0 & \Rightarrow & f \text{ es negativa en } (2,3) \\ 10 \in (3,\infty) & f(10) = 6720 > 0 & \Rightarrow & f \text{ es positiva en } (3,\infty) \end{array}$$

Entonces tenemos que:

$$C_+(f) = (-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(3,\infty) \text{ y } C_-(f) = (-2,0)\cup(2,3)$$

Límites especiales

Al igual que para sucesiones, mostraremos aquí algunos límites conocidos que nos servirán como herramientas para resolver indeterminaciones. Como se ha visto a lo largo del capítulo gran parte de los resultados obtenidos para sucesiones se copian para el tratamiento de límites de funciones. Es por esto que pasaremos directamente a estudiar una reformulación de un resultado obtenido en el capítulo cuatro, que nos permite salvar algunas indeterminaciones de la forma "1^{∞}". Como hicimos en el capítulo anterior, enunciaremos el teorema y dejaremos que el lector interesado consulte la demostración en la bibliografía [1CDIN].

Teorema: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función (no necesariamente definida en x_0) tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. En particular tomando $f(x)=x$ se obtiene $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Y tomando $f(x)=1/x$ se tiene $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$

Teorema (cero por acotado): Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones (no necesariamente definidas en x_0), acotadas tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=0$.

Demostración: Queremos probar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=0$, sabiendo que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, y que $-M<g(x)<M$, luego $|g(x)|<M$. Sabemos que para todo $\varepsilon>0$, existe un valor $\delta>0$, tal que si $|x-x_0|<\delta$, $|f(x)|<\varepsilon$. Luego acotemos $|f(x).g(x)|=|f(x)|.|g(x)|<|f(x)|M<\varepsilon M=\varepsilon'$, entonces tenemos que para todo $\varepsilon'>0$, existe un valor $\delta>0$, tal que si $|x-x_0|<\delta$, $|f(x).g(x)|<\varepsilon'$ (donde $\varepsilon M=\varepsilon'$), lo cual muestra que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n=0$.□

El último teorema también resulta ser una copia del teorema enunciado para sucesiones, y la demostración de este teorema no se dará, pero podrá ser consultada en la bibliografía [1CDIN] o [2NRSSFEC].

Teorema: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una función (no necesariamente definida en x_0), tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{sen(f(x))}{f(x)}=1$. Si tomamos $x_0=0$ y $f(x)=x$ obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$.

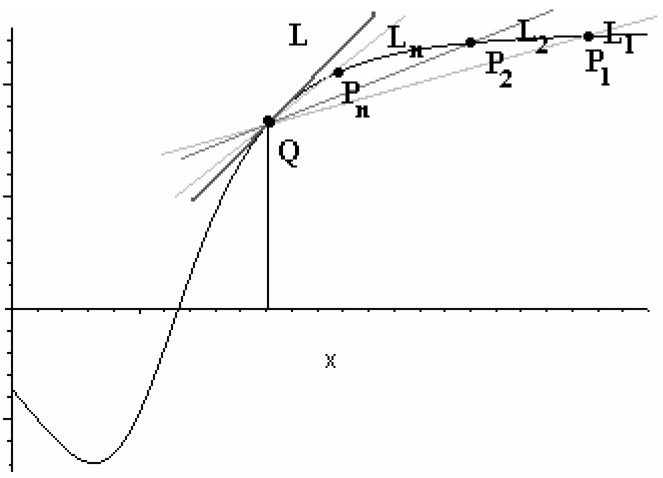
6 – DERIVADAS

Así como estudiamos en el capítulo anterior la noción de continuidad de una función en un punto veremos en este capítulo la noción de derivada puntual. Este concepto aportará una herramienta potente para comprender el gráfico de una función expresada analíticamente. La mayoría de la teoría desarrollada en este capítulo servirá principalmente para poder realizar un estudio de función competo. Así mismo obtendremos una herramienta potente para calcular límites.

Definición

Supongamos ahora que se tiene una función continua, cuya gráfica es suave, es decir, no presenta puntas ni quiebres bruscos.
Consideremos ahora un punto Q y otro punto P_1 sobre el gráfico de f , luego trazamos L_1 la recta secante al gráfico de f que pasa por los puntos marcados. Podemos repetir este procedimiento trazando las rectas L_1, L_2, L_3, … L_n, que pasan por los puntos P_1, P_2, P_3, … P_n y Q respectivamente, notemos que las rectas son cada vez más parecidas a la recta tangente al gráfico de f en el punto Q, a la cual hemos llamado L.

El gráfico siguiente ilustra este procedimiento.

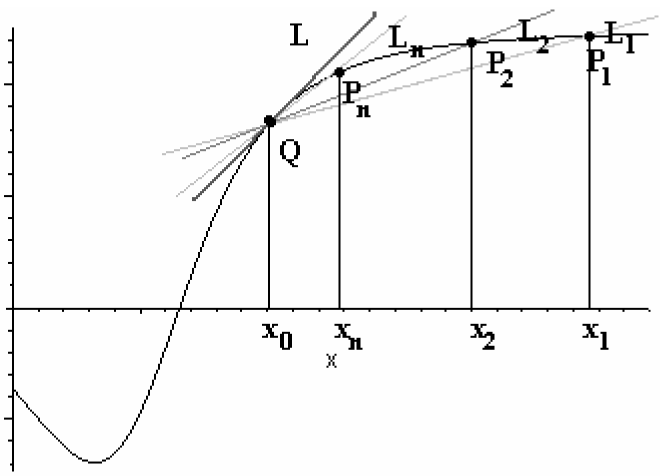


Formalicemos esta idea: Sea f una función continua definida en un intervalo $[a,b]$, tomemos $x_0 \in (a,b)$ y sea $P_i = (x_i, f(x_i))$ puntos sobre el gráfico de f de forma tal que la sucesión formada por los $x_i \to x_0$ cuando i tiende a infinito (es decir los valores de x_i se aproximan a x_0). Por otro lado, notemos que las pendientes de las rectas L_i definidas como antes son: $pend(L_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_0)}{x_i - x_0}$.

En definitiva afirmamos que el límite de este cociente, si existe, será el valor de la recta tangente en el punto Q.

Matemáticamente decimos que $\lim\limits_{i\to\infty} pend(L_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{f(x_i) - f(x_0)}{x_i - x_0} = pend(L)$.

Definición: Si este límite existe lo llamamos la derivada de f en x_0. Lo escribimos como: $\lim\limits_{x_i\to x_0} \dfrac{f(x_i) - f(x_0)}{x_i - x_0} = f'(x_0)$, o más usualmente, directamente suprimimos los subíndices y decimos: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.



También podemos llamar h_i a la distancia entre x_i y x_0, es decir $h_i = x_i - x_0$ y como x_i se aproximan a x_0 tenemos que h_i se aproximan a 0. Luego, tomando $h = x - x_0$ podemos rescribir el límite anterior de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Definición: Decimos que una función *f* es derivable en un punto x_0 si el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe (es finito), y en ese caso decimos que su derivada en ese punto es $f'(x_0)$.

Definición: Decimos que una función *f* es derivable en un intervalo (a,b), si es derivable en cada uno de sus puntos.

Observación:

i) La noción de derivabilidad (al igual que la de continuidad) es una noción local, es decir nos informa sobre el comportamiento de la función en un entorno del punto.

ii) Además es importante notar que la definición de función derivable en un intervalo automáticamente requiere que éste sea abierto ya que deben existir los límites al punto, tanto por izquierda como por derecha.
Si el intervalo fuera cerrado a izquierda (a derecha) no sería posible tomar límite por izquierda (derecha) al punto mínimo (máximo) del intervalo.

Derivada y recta tangente

Como hemos visto en la sección anterior la derivada de una función *f* en un punto x_0 se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente al gráfico de *f* en el punto x_0.

Esto nos brinda una forma práctica para conocer la recta tangente una función derivable en un punto dado. Sabemos que la recta tiene pendiente $f'(x_0)$ y sabemos que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ Luego $\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Por lo tanto se obtiene que:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ es la ecuación de la recta tangente.

Veamos algunos ejemplos de cálculos de derivadas

Ejemplos:

i) Calcular la derivada de *f* en $x_0=3$ de $f(x)=2x-4$. Y calcular la recta tangente al gráfico de *f* en ese mismo punto.

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-4-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6+2h-4-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

Calculemos ahora la recta tangente correspondiente:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2(x-3) - 2 = 2x - 4 .$$

No es casualidad que en este caso la recta haya resultado idéntica a la función lineal original, debería ser bastante claro para el lector que la recta tangente (la recta que mejor aproxima a la función en el punto), es la función misma.

Es de esperar que para cualquier función lineal la recta tangente a su gráfico en cualquier punto sea el gráfico de la función misma, y por lo tanto la derivada de la función será su pendiente independientemente de la elección del punto.

Es decir, si $f(x) = mx + b$,

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{m(x_0+h) + b - [mx_0 + b]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{mh}{h} = m$ y por lo tanto la recta tangente a *f* en x_0 es:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = m(x - x_0) + (mx_0 + b) = mx + b$, tal como se esperaba.

ii) Determinar si existe la derivada de la función $f(x) = |x|$ en el punto $x_0 = 0$. Para ello deberíamos ver si existe el límite del cociente incremental. Recordemos que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, por lo tanto calculemos primero $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ y luego $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Tenemos que $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$ y que: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h}{h} = -1$ luego el límite no existe, entonces decimos que *f* no es derivable en el cero.

iii) Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^{\,2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^{\,2} + 2x_0h + h^2 - x_0^{\,2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Observamos en este caso que el valor de la derivada depende de la elección del punto.

iv) Calcular la derivada de $f(x) = e^x$ en el punto x_0.

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} . \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(e^h - 1)}{h} = e^{x_0}$. Se deja como ejercicio para el lector verificar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(e^h - 1)}{h} = 1$.

Función derivada

Los ejemplos iii) y iv) muestran casos en los cuales los valores de las derivadas de las funciones dependen de los puntos en los cuales se las quiera calcular (cosa que no sucedía en el primer ejemplo). Tenemos que si $f(x)=x^2$ entonces $f'(x_0)=2x_0$ y que si $f(x)=e^x$ entonces $f(x_0)=e^{x_0}$.

Esto motiva pensar si se tiene una función que es derivable en (a,b) entonces para cada punto $x\in(a,b)$ esté definida $f'(x)$, es decir que para cada punto tenemos una derivada, lo cual nos da una función la cual llamaremos *función derivada*.

En los ejemplos tenemos que si $f(x)=x^2$ entonces su función derivada será $f'(x)=2x$ y que si $f(x)=e^x$ entonces su función derivada será $f(x)=e^x$.

Se deja como ejercicio para el lector verificar la siguiente lista de correspondencias:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0		$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
x	1		$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$mx+b$	m		e^x	e^x
x^a ($a\in\mathbb{R}$)	ax^{a-1}		$\ln(x)$	x^{-1}

Reglas de derivación

Como hemos podido apreciar en las secciones anteriores el cálculo de derivada no parece una tarea práctica, ya que esto involucra el cálculo de n límite el cual en la mayoría de los casos se presenta como una indeterminación del tipo cero sobre cero.

A continuación desarrollaremos técnicas que facilitarán el cálculo.

Teorema: Sean f y g dos funciones derivables en x_0. Entonces:

i) $(k.f)'=k.f'$ $\quad\forall k\in\mathbb{R}$

ii) $(f+g)'=f'+g'$

iii) $(f-g)'=f'-g'$

iv) $(f.g)'=f'.g+g'.f$

v) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'.g-g'.f}{g^2}$ (siempre y cuando el denominador no se anule)

Son derivables en x_0 y sus derivada correspondientes son los términos de la derecha.

Demostración: Probaremos i), ii), iii), iv).

i) $(k.f)'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k.f(x_0+h)-k.f(x_0)}{h}=k.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=k.f'(x_0)$.

ii) $(f+g)'(x_0)=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

iii) $(f-g)'(x_0)=(f+(-1)g)'(x_0)=f'(x_0)+((-1)g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$

iv)

$$(f.g)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(f.g)(x_0+h)-(f.g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0+h).g(x_0)+f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).(g(x_0+h)-g(x_0))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0)).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x_0+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+g(x_0).\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=f(x_0).g'(x_0)+g(x_0).f'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+g'(x_0).f(x_0)$$

Para la demostración de v) consultar la bibliografía [2NRSSFEC]. □

Ejemplo: Calcule la función derivada de $f(x)=tg(x)$

$$tg'(x)=\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{(\text{sen}(x))'.\cos(x)-\text{sen}(x).(\cos(x))'}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x).$$

Regla de la cadena

El siguiente teorema nos da una herramienta para derivar una composición de funciones. Esta forma de derivación se la suele conocer como *Regla de la cadena*.

Teorema: Si $f:A\to B,\ g:B\to C$ son dos funciones definidas en un entorno del punto x_0 y $f(x_0)$ y derivables en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente (es decir existen

$f'(x_0)$ y $g'(f(x_0))$). Entonces la composición resulta derivable en x_0 y más aun $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$.

Para ver una demostración de este teorema consultar la bibliografía [2NRSSFEC].

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f'(x) = (a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = \left(e^{x.\ln(a)}\right)' = e^{x.\ln(a)}.(x.\ln(a))' = a^x.\ln(a)$$

Notar que cuando $a = e$ obtenemos la conocida fórmula $f'(x) = e^x$.

Se deja como ejercicio (recomendable) que el lector verifique que la derivada de la función $f(x) = x^a$ es $f'(x) = a.x^{a-1}$, y que más generalmente la derivada de la función $f(x) = g(x)^{h(x)}$ es $f'(x) = g(x)^{h(x)}.\left(g'(x).\ln(f(x)) + \dfrac{g(x).f'(x)}{f(x)}\right)$. Y notar que si $g(x) = x$ y $h(x) = a$ estamos en el caso anterior y que si $g(x) = a$ $h(x) = x$ entonces estamos en caso del ejemplo dado.

Derivabilidad y continuidad

Estudiaremos en esta sección algunas vinculaciones entre la noción de continuidad y la de derivabilidad. Como ya dijimos, ambos conceptos nos informan sobre el comportamiento local de una función en un punto.

Esto es claro ya que el estudio de la continuidad en x_0 sólo involucra el cálculo de los límites laterales y la valuación de la función en el punto, es decir sólo nos interesa qué pasa en un entorno del punto. Para el estudio de la derivabilidad de la función en ese punto, sólo debemos calcular el límite del cociente incremental (lo cual requiere que la función esté definida en x_0), si este existe, ese valor será la derivada, si no existe, diremos que no es derivable en el punto.

Las preguntas que se nos plantean son: ¿será posible que la función sea continua pero no derivable? ¿será posible que la función sea derivable pero no continua?

Hemos mostrado un ejemplo de una función que es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en ese punto. Estamos hablando de la función $f(x) = |x|$: es claro que *f* es continua en cero (sus límites laterales y la valuación en el punto cero coinciden con cero), pero mostramos que no es derivable en el punto ya que $f'_+(0) = 1$ y $f'_-(0) = -1$, con lo cual afirmábamos que no existía el límite del cociente incremental en el punto. Con lo cual se ve que la respuesta a primera pregunta es que sí es posible.

Veremos ahora que la respuesta a la segunda pregunta es negativa, y para ello enunciamos el siguiente teorema.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función definida en un entorno del punto x_0 y derivable en x_0. Entonces *f* es continua en x_0.

Demostración: Como *f* es derivable en x_0, entonces $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Queremos ver que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ o sea $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.(x - x_0) = f'(x_0). \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0).0 = 0$$

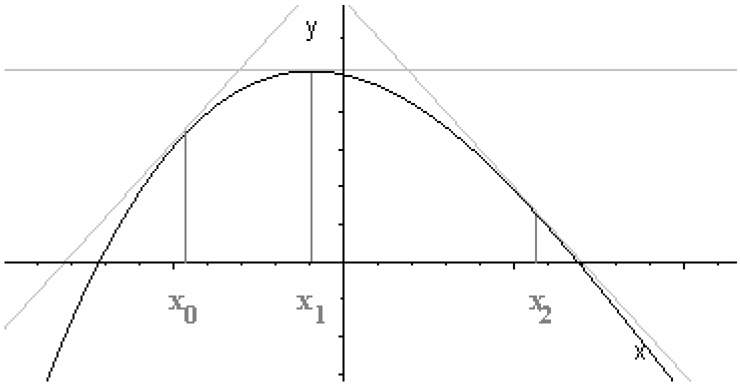
tal como queríamos. □

Geométricamente las preguntas anteriores se traducen de la siguiente manera: ¿será posible que la función sea continua (no tenga saltos) pero que no sea suave? ¿será posible que la función sea suave pero que tenga saltos? Es claro que la respuesta a la primera pregunta es sí, ya que la función $f(x) = |x|$ no pega saltos, pero no es suave en el cero, ya que en ese punto su gráfico se quiebra. La respuesta a la segunda pregunta es no, eso es lo que dice el teorema anterior, y geométricamente es visible, si la función es suave, no debería pegar saltos.

Teoremas del valor medio (Fermat, Rolle, Lagrange y Cauchy)

En esta sección nos concentraremos en construir herramientas que serán de suma utilidad para comprender el gráfico de las funciones.

Antes que nada el lector debería convencerse de que existe una relación muy estrecha entre la recta tangente al gráfico de una función *f* en un punto x_0 y el comportamiento local de la función en un entorno del punto x_0. En el gráfico de abajo se observa que al calcular la recta tangente al gráfico de *f* en un punto de un intervalo de *crecimiento de f* la recta también resulta creciente, esto es: su pendiente es positiva. Mientras que para los puntos de los intervalos de decrecimiento, la pendiente de la recta tangente es negativa. Así mismo la recta tangente en el máximo de la función resultó ser horizontal, es decir que la pendiente de la recta tangente en ese punto es cero. Recordemos que la derivada de la función en el punto representa la pendiente de la recta tangente al gráfico en el punto. Esto nos muestra de qué manera la noción de derivada se vincula con el estudio del crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función.



Formalizaremos ahora las nociones de crecimiento y decrecimiento, y las de máximos y mínimos.

Definición: Sea $f : A \to B$ una función definida en un entorno del punto x_0 decimos que x_0 es un máximo local de *f*, si existe un entorno *I* de x_0 tal que $f(x) \le f(x_0)$ para todo $x \in I$.

Definición: Sea $f : A \to B$ una función definida en un entorno del punto x_0 decimos que x_0 es un mínimo local de *f*, si existe un entorno *I* de x_0 tal que $f(x) \ge f(x_0)$ para todo $x \in I$.

Definición: Sea $f : A \to B$ una función decimos *f* es creciente en *A* si se cumple que $x_0 \le x_1 \Rightarrow f(x_0) \le f(x_1)$ para todo $x_0, x_1 \in A$.

Definición: Sea $f : A \to B$ una función decimos *f* es creciente en *A* si se cumple que $x_0 \le x_1 \Rightarrow f(x_0) \ge f(x_1)$ para todo $x_0, x_1 \in A$.

El primero de los teoremas nos da un resultado bastante esperado, que ya hemos mostrado al comienzo de la sección.

Teorema (Fermat): Sea *f* una función definida en un intervalo abierto (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ tal que *f* tiene una máximo o un mínimo en x_0, entonces si *f* es derivables en x_0, $f'(x_0) = 0$.

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que x_0 es un mínimo de *f*. Sea $x \in (a,b)$, sabemos que $f(x) \ge f(x_0)$. Calculamos entonces las derivada laterales de *f*, esto es $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Notemos que cuando $x \to x_0^+$ vale que $x > x_0$ o sea $x - x_0 > 0$ entonces se tiene

que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ y por la propiedad de conservación del signo $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Así mismo cuando $x \to x_0^-$ vale que $x < x_0$ o sea $x - x_0 < 0$ luego $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ y entonces $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Pero como *f* es derivable en el punto x_0, entonces las derivadas laterales deberían coincidir, luego $f'(x_0) = 0$. Es el caso en que x_0 es un máximo de *f*, se copia la demostración haciendo las consideraciones pertinentes (se deja este caso como ejercicio para el lector). □

A continuación se enunciará un teorema que dice que si se tiene una función continua en un intervalo cerrado y derivable, que en los extremos coincide, entonces en algún punto del medio la derivada se anula. Este hecho es obvio, ya que toda función continua alcanza un máximo y un mínimo en un intervalo cerrado, y luego bastará con aplicar el teorema anterior.

Teorema (Rolle): Sea *f* una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Como *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces sabemos que *f* alcanza un máximo y un mínimo. Sea $x_1 \in [a,b]$ un mínimo de *f* y $x_2 \in [a,b]$ un máximo. Es claro que si ambos valores no son los extremos, entonces alguno de los dos cae dentro del intervalo (a,b), y por el teorema anterior *f´* se anula en ese punto. Si Ambos valores coinciden con los extremos entonces *f* tiene que ser constante, y trivialmente $f'(x) = 0$ para todo valor de $x \in [a,b]$.□

Ahora veremos se generaliza el teorema anterior para el caso en el cual la función considerada no vale lo mismo en los extremos del intervalo.

Teorema (Lagrange): Sea *f* una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Demostración: Intentaremos llevar las condiciones de este teorema a las del teorema anterior. Para ello consideraremos la siguiente función: $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, lo cual representa la ecuación de la recta que une al punto $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Consideremos la resta $f(x) - y$ lo cual representa la distancia vertical entre la cuerda y la función *f* en cada punto, y llamemos *g* a

esta nueva función. Tenemos entonces que $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$, de los cual obtenemos que $g(a) = g(b) = 0$ (se deja que el lector verifique este resultado).
Como nuestra nueva función g es suma y producto de funciones continuas, el álgebra de funciones continuas nos aseguran la continuidad de g en $[a,b]$ y por la misma razón será derivable en (a,b). Entonces por el teorema de Rolle afirmamos que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Calculando la derivada obtenemos que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Y por la condición anterior $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ de lo cual se obtiene que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Teorema (Cauchy): Sea f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\left(f(b) - f(a)\right)g'(c) = f'(c)\left(g(b) - g(a)\right)$ además si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demostración: Se deja que el lector consulte la demostración de este teorema en la bibliografía. □

Consecuencias de los Teoremas del valor medio

Veremos ahora algunas consecuencias de los teoremas anteriores. Recordemos que decíamos la derivada de una función constante es la función cero (constantemente igual a cero) la pregunta que surge es: si *f´* es constantemente nula en (a,b), ¿será *f* constante? Y la respuesta es afirmativa ya que si x_1 y x_2 son dos valores de $[a,b]$ (supongamos $x_1 < x_2$), y miramos a *f* en el intervalo $[x_1, x_2]$ esta resulta continua y derivable en (x_1, x_2). Afirmamos entonces por el teorema de Lagrange que existe un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Ahora observemos que si la derivada *f´* es constantemente nula entonces $f'(c) = 0$ con lo cual $f(x_2) - f(x_1) = 0$, entonces $f(x_2) = f(x_1)$ cualesquiera sean x_1 y x_2 en $[a,b]$, entonces vemos que *f* es constante. De aquí obtenemos la siguiente proposición:

Proposición: Si *f* es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y además $f'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$. Entonces *f* es constante en $[a,b]$.

De la proposición anterior se deduce que si f y g son dos funciones continuas en$[a,b]$ y derivables en (a,b), y además $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in(a,b)$ entonces podemos considerar la función $h(x)=f(x)-g(x)$ cuya derivada es $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ y como h cumple con las hipótesis del teorema anterior tenemos que h es constante, luego *f* y g difieren en una constante. Mas formalmente decimos:

Corolario: Si *f* y g son dos funciones es continuas en$[a,b]$ y derivables en (a,b), y además $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in(a,b)$.Entonces $f(x)=g(x)+c$ para todo $x\in[a,b]$, con $c\in\mathbb{R}$.

Más aún, tal como observábamos al comienzo de la sección anterior el conocimiento de la derivada nos permite decidir sobre el crecimiento o decrecimiento de la función, como se muestra en el próximo teorema:

Proposición: Si *f* es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$, entonces *f* es estrictamente creciente en $[a,b]$. Si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$, entonces *f* es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Demostración: tal como hicimos antes sean x_1 y x_2 son dos valores de $[a,b]$ (supongamos $x_1<x_2$), y miramos a *f* en el intervalo $[x_1,x_2]$ esta resulta continua y derivable en (x_1,x_2). Afirmamos entonces por el teorema de Lagrange que existe un punto $c\in(x_1,x_2)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$, observemos que $f'(c)>0$, entonces $f(x_2)-f(x_1)>0$, y así $f(x_2)>f(x_1)$ cualesquiera sean x_1 y x_2 en $[a,b]$. Entonces vemos que *f* es estrictamente creciente. Análogamente se obtiene el segundo resultado. □

Un resultado que parece esperable es que toda función estrictamente creciente es inyectiva. Esto es bastante claro ya que si tomara en dos valores distintos x_1 y x_2 de su dominio un mismo valor en las imágenes $f(x_2)=f(x_1)$, por el teorema de Rolle su derivada se anularía en algún punto del intervalo (x_1,x_2), lo cual contradice que sea estrictamente creciente. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición: Si *f* es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si *f* es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[a,b]$, entonces *f* es inyectiva.

Derivada de la función inversa

La proposición anterior nos brinda una herramienta potente para determinar la existencia de funciones inversas y de sus respectivas derivada.

Teorema: Sea $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$, continua en $[a,b]$. Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[a,b]$. Entonces está definida $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$ y si *f* es derivable en $x_0\in(a,b)$ y $f'(x_0)\neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y además $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Ejemplo: Consideremos la función $f:(0,\pi)\to(-1,1)$, definida como $f(x)=\cos(x)$, debería ser claro para el lector que $f'(x)=-sen(x)$ y claramente $f'(x)<0$ para todo $x\in(0,\pi)$, luego *f* es estrictamente decreciente en $[0,\pi]$. Entonces el teorema anterior nos permite deducir que f admite función inversa. Decimos que $f^{-1}=\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ y además por el teorema anterior como $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in(0,\pi)$, entonces f^{-1} es derivable en $(-1,1)$. Y podemos calcular su derivada usando que $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, es decir $(\arccos)'(y)=\dfrac{1}{-\mathrm{sen}(\arccos(x))}$.

Si tomamos $y=\arccos(x)\Rightarrow\cos(y)=x$ y como $\mathrm{sen}(y)=\sqrt{1+\cos^2(y)}=\sqrt{1+x^2}$ entonces tenemos que $(\arccos)'(y)=\dfrac{1}{-\mathrm{sen}(\arccos(x))}=\dfrac{-1}{\mathrm{sen}(y)}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ si $x\in(-1,1)$.

Derivadas sucesivas

En esta sección se expondrá un resultado bastante obvio. Es claro que dada una función derivable *f* podemos calcular su función derivada *f´*, la cual resulta ser una función. Si además ésta también resultara derivable, podríamos entonces calcular su derivada (*f´*)´, es decir, la derivada de la derivada de la función *f*, y notaremos con *f´´* a la derivada de la derivada de *f* y la llamaremos la *derivada segunda de f*.

Este proceso se generaliza tanto como sea posible (dependiendo solamente de la *suavidad* de la función original). Más en general diremos:

Definición: Sea f una función derivable n veces en un punto x_0. Notamos con $f^{(n)}(x_0)$ a la derivada n-ésima de f en el punto x_0. Y vale que $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)} \right)'(x_0)$.

Ejemplo:

i) Si $f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f''(x) = 6x + 8$, $f'''(x) = 6$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

ii) Si $f(x) = \cos(x)$ se verifica que $f'(x) = -\text{sen}(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$, $f^{(5)}(x) = \cos(x)$. Se deja como ejercicio verificar que:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{sen}(x) & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cos(x) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

iii) Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$.Se tiene que $f'(x) = n.x^{n-1}$, $f''(x) = n.(n-1)x^{n-2}$, $f'''(x) = n.(n-1)(n-2)x^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}.x^{n-3}$. Y claramente su derivada resulta nula si se deriva más de n veces. Entonces se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{n!}{(n-k)!} \right) x^{n-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

Regla de L´hôpital

Una consecuencia importante del teorema de Cauchy es lo que llamaremos la Regla de L´hôpital, que es una herramienta muy poderosa para el cálculo de límites.

Teorema: Sean f y g funciones definidas y derivables en (a,b). Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ salvo para $x = x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Entonces si existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ y es finito, entonces afirmamos que el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ existe y más aun, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Demostración: Sea $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=l\in\mathbb{R}$, entonces dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que: $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon$ (debemos tomar los intervalos de manera tal que ambas funciones queden definidas ahí dentro). Como $g(x_0)=0$ entonces $g(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$ salvo para $x=x_0$ (ya que si no fuera así, por el teorema de Rolle, existiría un valor *c* en el cual $g'(c)=0$, y esto no puede ser por hipótesis).

Si $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ para algún valor *c* entre *x* y x_0, en particular tendremos que $0<|c-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$ tal como se quería. □

El teorema se aplica también en el caso en que la indeterminación a salvar sea del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Más precisamente:

Teorema: Sean f y g funciones definidas y derivables en (a,b), salvo en $x_0\in(a,b)$. Supongamos además que $\lim_{x\to x_0}f(x_0)=\lim_{x\to x_0}g(x_0)=\infty$ y que $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$ salvo para $x=x_0$. Entonces si existe el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ y es finito, entonces afirmamos que el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ existe y más aun, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos: Calcular los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$. Para ello observamos que es una ingerminación del tipo "$\frac{0}{0}$", mediante la regla de L´hôpital obtenemos que el cálculo de ése límite es equivalente al cálculo de $\lim_{x\to 1}\frac{x^{-1}}{1}=\lim_{x\to 1}x^{-1}=1$. Por lo tanto $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$. Tenemos:

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{2x}=\frac{1}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}=\frac{1}{2}$, luego $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Observación 1: Las indeterminaciones del tipo "$0.\infty$" puede rescribirse para ser llevadas a indeterminaciones de los tipos anteriores.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}x.\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ representa una indeterminación de la forma "$0.\infty$". Y rescribimos esto como $\lim_{x\to 0}x.\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.(-2).\frac{1}{x^3}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}2.x=0$.

Observación 2: Las indeterminaciones del tipo "1^∞", "0^0" (tendiendo a cero por 0^+), "∞^0" puede salvarse rescribiendo:
$\ln\left(\lim_{x\to 0}f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\ln f(x)\right)=l$. La primera igualdad vale por la continuidad del $\ln(x)$. Finalmente $\lim_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=e^l$.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)\right)^{\left(\frac{3}{x^2}\right)}$ representa una indeterminación del tipo "1^∞". Rescribiendo obtenemos que $\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)\right)^{\left(\frac{3}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}\right)\ln\left(\cos(2x)\right)=3.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos(2x)\right)}{x^2}$ lo cual lo hemos transformado en una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", entonces nuevamente por la regla de L´hôpital obtenemos que $3.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos(2x)\right)}{x^2}=$

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(2x)}\left(-\mathrm{sen}(2x)\right).2}{2x}=3.\lim_{x\to 0}\frac{-tg(2x)}{x}=-3.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(2x)}.2=-6.$$

Luego $\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)\right)^{\left(\frac{3}{x^2}\right)}=e^{-6}$

APÉNDICE A - (Lógica de primer orden y teoría de conjuntos)

Introducción

El concepto de conjunto es de fundamental importancia en las matemáticas modernas. Los primeros estudios en esta rama corresponden a Georg Cantor , quien dio su primer tratamiento formal en 1870 y en el año 1874 apareció el primer trabajo revolucionario de *C*antor sobre la Teoría de conjuntos. El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemática, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. Muchos matemáticos creen que es posible expresar todas las matemáticas con un lenguaje de teoría de conjuntos.

En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el infinito. Otra aplicación de la teoría de conjuntos la encontramos con el modelado e investigación de operaciones en las ciencias computacionales.

La teoría de conjuntos se ha convertido en un área muy bien establecida de la matemática, y han surgido contradicciones o paradojas en dicha teoría, y fue revista varias veces hasta llegar a lo que se conoce hoy como teoría de conjuntos. Eventualmente, los más sofisticados acercamientos al trabajo original de *C*antor hicieron que dichas paradojas desaparecieran.

Desarrollaremos en este capítulo las nociones básicas de la teoría de conjuntos sin detenernos demasiado en cuáles fueron los problemas que generaron las paradojas anteriormente mencionadas y finalizaremos con una sección dedicada completamente a las paradojas, en la cuál no nos detendremos en el análisis de ninguna de ellas.

TLos axiomas

Originalmente la teoría de conjuntos fue creada de forma semiintuitiva, pero la aparición de algunas paradojas hizo que fuera necesaria una formalización axiomática.

Sabemos que un axioma es un principio o postulado básico que es asumido como regla de juego en el proceso de la inferencia lógica, que no requiere ninguna demostración previa. Fue en la antigua Grecia donde empezó el uso de los axiomas, que representaba enunciados o afirmaciones que valían por su aparente evidencia.

Definición: Un *axioma* es un principio que permite iniciar un proceso lógico de deducción, tomándolo como partida para los pasos de razonamiento.

La colección inicial de signos, definiciones, enunciados, postulados y reglas de derivación (o deducción) forman lo que se denomina un *sistema axiomático*. Este sistema axiomático debe ser, *indecidible* y *consistente* (no contradictorio) y desearíamos que fuera *completo*.

Indecidible: Ningún axioma del sistema puede ser obtenido (deducido) partiendo de los demás axiomas. Esto indica que el conjunto de axiomas debe ser minimal.

Consistente: Nunca podrá deducirse una contradicción como teorema. Esto es que lo afirmado por un axioma nunca puede contradecir lo afirmado por los demás axiomas.

Completo: Desearíamos que todas las verdades del universo en el que trabajamos puedan ser deducidas de los axiomas.

Uno de los trabajos más importantes en la teoría de conjuntos demuestra que ningún sistema axiomático formal puede ser completo y consistente a la vez, este resultado se debió al trabajo de Gödel a mediados del siglo pasado.

La primera axiomatización apareció en 1908, consistía en siete axiomas (los siete axiomas de Zermelo (*B*erlin 1871 - Friburgo 1953). Estor eran: *Axioma de extensionalidad, axioma de formación de conjuntos, axioma del par, axioma de la gran unión, axioma del conjunto de partes, axioma de elección*.

Finalmente diremos que los teoremas son todos los resultados (tiras de símbolos con sentido) que se desprenden de los axiomas aplicando el método deductivo.

Conceptos básicos teoría de conjuntos y notación

Usualmente notaremos los conjuntos con letras mayúsculas. Los objetos que forman los conjuntos serán denominados, los *elementos* del conjunto, y serán expresados entre llaves "{ , }", separados por comas. Por ejemplo: el conjunto formado por *elementos* 1,2,3,4, que llamaremos *A*, se nota de la siguiente manera: $A = \{1,2,3,4\}$. *C*uando definimos un conjunto enumerado los elementos que contiene, diremos que la definición es por *extensión*.

El símbolo elemento $\in$ significa (es elemento de). *A*nálogamente, $\notin$ significa (no es elemento de). Por ejemplo: Sea $A=\{1,2,3,4\}$, el mismo conjunto que el anteriormente definido, cuyos elementos son los primeros cuatro números naturales. Podemos entonces escribir $1\in A,\ 2\in A,\ 3\in A\ y\ 4\in A$, a su vez, $5\notin A$, $17\notin A$, etc.

Definición: Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si cada elemento de A es elemento de B y viceversa. Se escribe $A=B$.

.

Ejemplo: En el ejemplo anterior pusimos $A=\{1,2,3,4\}$; puesto que $\{1,2,3,4\}$ es un símbolo para representar al mismo conjunto que representa A. Por lo tanto $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{2,4,1,3\}$ representan el mismo conjunto.

Observación: Debe notarse que, según la definición anterior, al definir un determinado conjunto no importa el orden en que se expresan los elementos.

Es útil tener el concepto de un conjunto sin elemento, para ello daremos la siguiente definición:

Definición: un conjunto sin elementos recibe el nombre de *conjunto vacío o conjunto nulo* y se representa por $\{\ \}$ o por $\varnothing$.

Definición: el conjunto formado por *todos* los elementos, recibe el nombre de *conjunto universal*, y se nota con la letra *U*.

Lógica proposicional y de predicados.

En la sección anterior hemos mostrado ejemplos de conjuntos, que fueran definidos por extensión, claramente este método de definir conjuntos no parece adecuado cuando el conjunto que se desea definir es numeroso, y se complica aún más cuando éste es infinito.

*C*uando el conjunto de elementos que se desea definir es muy numeroso se utilizan definiciones por *intención*. Esto consiste en dar propiedades de los elementos que forman el conjunto, mediante un *predicado lógico* que estos elementos deberán satisfacer. En principio podría tomarse cualquier lenguaje natural para describir los elementos del conjunto, sin embargo es preferible usar un *lenguaje formal* que nos permita definir con precisión lo suficiente y necesario como para que el conjunto quede bien determinado.

Para expresar los predicados utilizaremos el lenguaje formal de la *lógica de predicados de primer orden*. Esto es: usaremos construcciones de lógica proposicional, formada por los conectivos $\neg,\vee,\wedge,\Rightarrow$, agregándoles los cuantificadores existenciales ($\exists$) y universales ($\forall$).

Veamos algunos ejemplos antes de seguir:

Ejemplos: i) Formalicemos la frase: “voy al cine o voy al teatro” (admitimos el caso en el cual se pueda ir a los dos lugares). Distinguiremos dos proposiciones: *P*, *Q*, y un conectivo lógico: o $=\vee$.
“$\underbrace{\text{voy al cine}}_{P}$ *o* $\underbrace{\text{voy al teatro}}_{Q}$” es equivalente a “$P \vee Q$”. Pero para cada proposición sólo hay un posible valor de verdad: es verdadera o es falsa. Se plantean entonces cuatro posibilidades que se mostrarán en la siguiente tabla:

P	Q	$P \vee Q$	*Significa:*
V	V	*V*	“voy al cine y voy al teatro”
V	F	*V*	“voy al cine pero no voy al teatro”
F	V	*V*	“no voy al cine pero voy al teatro”
F	F	*F*	“no voy ni al cine ni voy al teatro”

Notar que para los tres primeros casos se cumple la proposición planteada, mientras para el último caso no se cumple. Esto representa lo que se llama la *tabla de verdad del conectivo* $\vee$. Que es verdadera cuando alguna de las proposiciones es verdades y es falsa sólo cuando todas las proposiciones son falsas.

A continuación se muestra las tablas de verdad del $\neg, \wedge, \Rightarrow$:

P	$\neg P$
V	*F*
V	*V*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	*V*	*V*
V	F	*F*	*F*
F	V	*F*	*V*
F	F	*F*	*V*

Ejercicio: se deja para el lector demostrar, mediante tablas de verdad, que las siguientes fórmulas son equivalentes:

i) $P \Rightarrow Q$ y $\neg P \vee Q$. (Esto muestra que el conectivo $\Rightarrow$ puede construirse con los demás conectivos).

ii) $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (resultado conocido como el contrarecíproco)

iii) $\neg(P \vee Q)$ y $\neg P \wedge \neg Q$.

iv) $\neg(P \wedge Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$.

A estas últimas dos equivalencias se las conocen como *Leyes de De Morgan*.
Debido a la gran importancia del ítem ii) mostraremos aquí su validez:
Para demostrar que $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$ son equivalentes cualesquiera sean *P* y *Q*, debemos ver sus tablas de verdad son iguales:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	*V*	F	F	*V*
V	F	*F*	V	F	*F*
F	V	*V*	F	V	*V*
F	F	*V*	V	V	*V*

Veamos un ejemplo de cómo se extiende la lógica proposicional a la lógica de predicados de primer orden mediante la adición de los cuantificadores existenciales y universales al lenguaje de símbolos.

Ejemplo: Consideremos el siguiente predicado, conocido como *Principio de Arquímedes*: "Para cualquier número natural, podemos encontrar un número real que lo supere". Intentemos usando lógica de predicados formalizar este concepto. "Para cualquier número natural" puede pensarse como "Para cualquier elemento *n*, que sea un número natural" esto se escribe: $(\forall n)(n \text{ es un número natural})$, pero la frase "$n$ es un número natural" representa un predicado, el predicado de pertenencia, que puede escribirse como "$n \in \mathbb{N}$" y representa un predicado *P* (o bien P(n)) en el cual la variable *n* está siendo fijada por el cuantificador universal. La segunda parte, "podemos encontrar un número real que lo supere", quiere decir que existe otro elemento que cumple con el predicado ser un número real y con el predicado ser mayor que *n*, esto es $(\exists r)(Q \wedge R)$, donde *Q*: ser un número real ($Q: r \in \mathbb{R}$), y *R*: ser mayor que *n* ($r > n$).
En definitiva tenemos que el predicado "Para cualquier número natural, podemos encontrar un número real que lo supere" se formaliza como "$(\forall n)((n \in \mathbb{N})(\exists r)((r \in \mathbb{R}) \wedge (r > n)))$", que por comodidad suele escribirse como: "$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $r > n$".

Esto muestra que en el lenguaje de predicados podemos agregar símbolos de la aritmética que nos permiten formar predicados más claros.

Los siguientes ejemplos son de especificaciones implícitas de conjuntos. Las dos primeras son de conjuntos infinitos; la tercera es un conjunto finito.

i) El conjunto de enteros mayores que 10 es especificado por $\{\ x/x \in \mathbb{Z}, x > 10\}$, comúnmente se escribe $\{x \in \mathbb{Z}/x > 10\}$

ii) El conjunto de enteros pares puede ser especificado como $\{x \in \mathbb{Z}/\exists y,\ y \in \mathbb{Z},\ x = 2y\}$

Significados menos formales son usados frecuentemente para describir conjuntos. Una técnica es colocar las especificaciones del conjunto a la izquierda de una barra vertical, como lo muestran los siguientes ejemplos:

iii) El conjunto de enteros múltiplos de 3 puede ser especificado por $\{3x/x \in \mathbb{Z}\} = 3.\mathbb{Z}$ en lugar de $\{x/x \in \mathbb{Z},$ tal que $\exists y,\ y \in \mathbb{Z},\ x = 3y\}$

iv) El conjunto de números racionales puede ser especificado por $\left\{ \frac{x}{y} \middle/ x, y \in \mathbb{Z},\ y \neq 0 \right\}$

Si un conjunto es finito pero muy largo como para listarse fácilmente o si es un conjunto infinito, los puntos suspensivos suelen ser usadas para especificar implícitamente un conjunto. Las siguientes especificaciones usan puntos suspensivos para caracterizar una lista de los elementos de un conjunto.

v) El conjunto de enteros del 1 al 20 es especificado por $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$

vi) El conjunto de naturales pares es especificado por $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Todas éstas técnicas informales de especificaciones de conjuntos son convenientes por lo cual podemos usarlas libremente, mientras que sean suficientemente claras y no se presten a confusión.

Operaciones con conjuntos

Existen operaciones que nos permiten crear nuevos conjuntos a partir de otros conocidos.

Definición: llamamos *complemento* A^c de A al conjunto $A^c = \{x / x \notin A\}$

Definición: llamamos *unión* $A \cup B$ e *intersección* $A \cap B$ de dos conjuntos A y B a los siguientes conjuntos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

La definición de $A \cup B$ admite el caso en que el elemento x esté en ambos conjuntos a la vez, para notar esto no hay más que mirar la definición de $\vee$.

Definición: Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

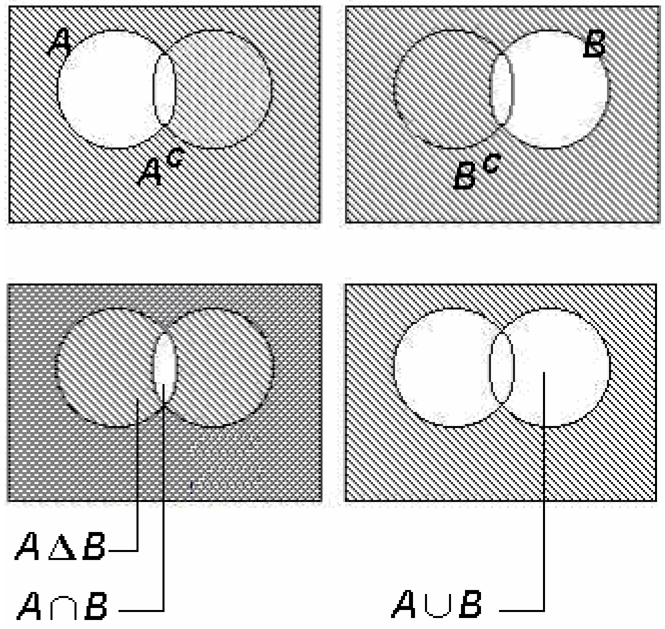
Definición: Para dos conjuntos A y B, el *complemento relativo* $A \setminus B$ es el conjunto de elementos que están en A y no están en B. Matemáticamente decimos que: $A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Observación: Podemos rescribir $A^c = U \setminus A$, donde U representa al conjunto universal.

Definición: La *diferencia simétrica* $A\Delta B$ de los conjuntos A y B es el conjunto $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

En general para $A \subseteq U$ el complemento relativo $U \setminus A$ recibe el nombre de *complemento absoluto* o sencillamente *complemento* y se denota por A^c. Nótese que el complemento relativo $A \setminus B$ puede escribirse en términos del complemento absoluto: $A \setminus B = A \cap B^c$.

Para ilustrar las definiciones anteriores introduciremos los llamados *diagramas de Venn*.



Ejemplo: Sean:

$A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 7\}$,

$B = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par } \wedge \ n \leq 16\}$ y

$E = 2.\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par}\}$.

Entonces tenemos:

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16\}$,
$A \cap B = \{0,2,4,6\}$,
$A \setminus B = \{1,3,5,7\}$,
$B \setminus A = \{8,10,12,14,16\}$,
$A\Delta B = \{1,3,5,7,8,10,12,14,16\}$.

Leyes de álgebra de conjuntos:

$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	*Leyes conmutativas*
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	*Leyes asociativas*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*Leyes distributivas*
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	*Leyes de la idempotencia*
$A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap U = A$	*Leyes de identidad*
$(A^c)^c = A$ $A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \varnothing$ $U^c = \varnothing$ $\varnothing^c = U$	*Complementación*
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	*Leyes de DeMorgan*

Las demostraciones que se hacen usando diagramas de Venn parecen mucho más fáciles que las pruebas en las que analizamos las inclusiones mediante elementos. Los diagramas de Venn para tres conjuntos tienen 8 regiones y comprenden todas las posibilidades lógicas, lo cual nos dice que las demostraciones que utilizan diagramas de Venn perfectamente válidas.

Sin embargo hay una objeción que hacerle a este tipo de pruebas, utilizar diagramas de Venn es muy complicado de dibujar cuando hay más de tres conjuntos.TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT TTTTTTTTTTTTTTTTTT

Producto cartesiano, relaciones y funciones

Definición: un par ordenado consta de dos elementos a y b, donde hay un primer elemento y un segundo elemento distinguido. La notación usual para pares ordenados es (a,b). Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales si y solo si $a=c$ y $b=d$.

Dados dos conjuntos A y B podemos definir un nuevo conjunto llamado el conjunto *producto cartesiano de* A y B, y lo notamos como $A \times B$. Este conjunto está formado por todos los elementos de la forma (a,b) con $a \in A$, $b \in B$.

Ejemplo: Consideremos los conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$, $B = \{1,2,3\}$. Tenemos entonces que el producto cartesiano de A y B resulta:
$$A \times B = \{(\alpha,1),(\beta,1),(\chi,1),(\delta,1),(\alpha,2),(\beta,2),(\chi,2),(\delta,2),(\alpha,3),(\beta,3),(\chi,3),(\delta,3)\}$$

Definición: Usaremos la notación $\# A$ para denotar cual es la cantidad de elementos que tiene el conjunto A, en el caso de ser infinito diremos que $\# A = \infty$, sin hacer ningún otro tipo de disquisición al respecto.
Ejemplo: Con los conjuntos definidos en el ejemplo anterior tenemos que $\# A = 4$, $\# B = 3$, $\#(A \times B) = 12$.
Además $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \infty$ y que $\#\mathbb{R} = \infty$ también.

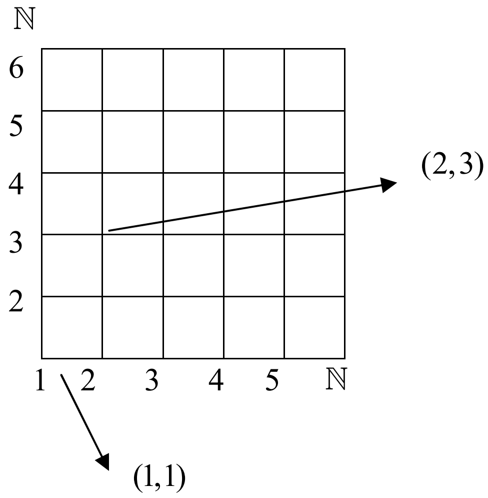
Ejercicio: Se deja al lector convencerse de que el conjunto producto cartesiano tiene exactamente tantos elementos como el producto entre los elemento de ambos conjuntos. Es decir: si $\# A = n$, $\# B = m$, entonces $\#(A \times B) = n.m$.

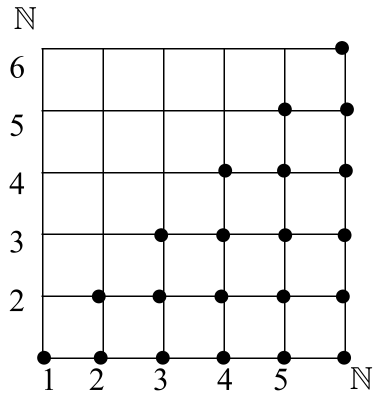
Retomemos el tema del primer capítulo y volvamos con la noción de relación. Ahora más formalmente podemos decir que dados dos conjuntos A y B, y su producto cartesiano, definimos en $A \times B$ una relación como un subconjunto $R \subseteq A \times B$. Esto es, algunos de los pares ordenados del conjunto producto serán admitidos y otros no.

Para fijar ideas retomemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: $A = B = \mathbb{N}$, $A \times B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, el producto cartesiano está formado por toso los pares ordenados de números naturales (notar que los pares (1,2) y (2,1) son pares distintos, y estos distintos de los demás).
Definamos una relación $R \subseteq A \times B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$$R = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,2),(2,3),\ldots,(3,3),(3,4),\ldots,(4,4),(4,5),\ldots(n,n),(n,n+1),\ldots\}$$
Notar que $(2,1) \notin R$, $(3,2) \notin R$, $(7,3) \notin R$, es decir quedan excluidos aquellos pares en los cuales el primer elemento es mayor que el segundo. Se define de esta manera la relación: $(a,b) \in R$ si y sólo si $a \leq b$, $a,b \in \mathbb{N}$.

Veamos cómo podemos representar de manera más visible cuáles son los elementos que pertenecen a la relación. Diseñemos una grilla (en este caso infinita) en la cual colocaremos horizontalmente los electos del primer conjunto del par ordenado, y verticalmente los del segundo conjunto.

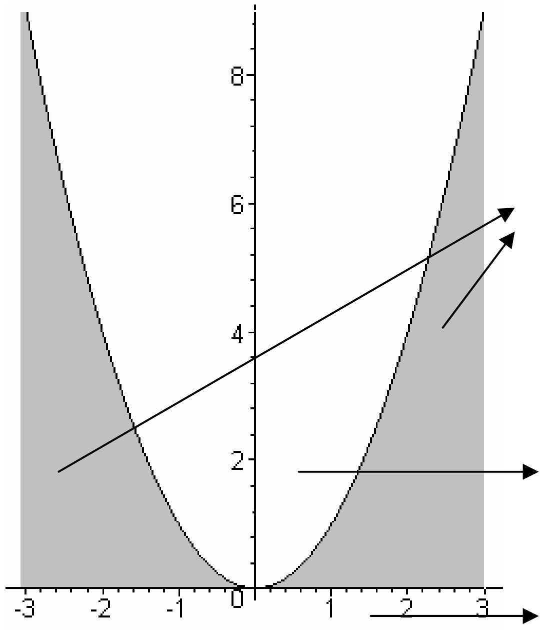




Elementos de la relación

En general usaremos esta forma de representar relaciones (o funciones), aunque muchas veces cuando los conjuntos que forman los pares ordenados son densos (ver capítulo 3) este tipo de grillas no se pueden construir y los representamos gráficamente sobre dos ejes perpendiculares. Esto no es más que lo que estaba a acostumbrado a hacer el alumno de secundario con las funciones reales. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos la relación S sobre el producto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ definida por $(a,b)\in S$ si y sólo si $a^2 \leq b$ y $a \geq 0$, esto muestra que b debe ser al menos igual al cuadrado de a. Como en el eje vertical colocaremos los valores de b. veamos el siguiente gráfico que ayudará a entender la situación.



Elementos que pertenecen a la relación.

Elementos que no pertenecen a la relación porque $a < b^2$.

Elementos que no pertenecen a la relación porque $a < 0$.

Definición: Si $R \subseteq A \times B$ representa una relación, llamaremos gráfico de la relación al conjunto: $graf(R) = \{(a,b) \in A \times B / a$ y b se relacionan por $R\}$.

Veamos ahora cómo se desprende el concepto de *función*. Comenzaremos con una definición:

Definición: Sea $R \subseteq A \times B$ una relación, diremos que *R* es una función si para cada elemento $a \in A$, existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in R$. Es decir que para cada electo de *A* siempre hay un elemento que se relaciona con él y nunca más de uno.

Gráficamente lo que estamos diciendo es que si para cada elemento de *A* trazamos una línea vertical en el gráfico, nunca deberíamos encontrar más de un punto de la relación.

Notación: Como para cada valor *a* del conjunto *A* hay un único valor *b* de *B* que le corresponde, notamos a éste último elemento como $b = R(a)$, Además como *R* es una función, la notación usual para funciones es usar las letras *f,g,h*. Además decimos que la función $f : A \to B$, esto es que toma elementos en *A* y llega a *B*. estos conjuntos reciben nombres característicos que los relacionan con la función, es decir. Diremos que *A* es el *dominio de la función*, y que *B* es el *codominio de f*, y se suele escribir, $Dom(f) = A$, $Cod(f) = B$.

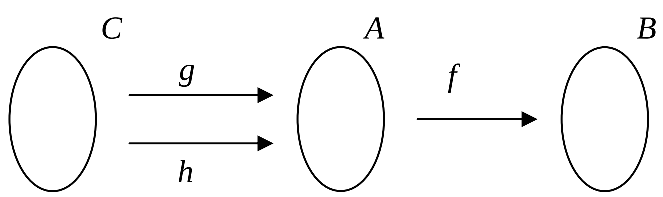
Se presentan varios ejemplos de funciones en el capítulo correspondiente a este tema, donde se las estudia con mayor detalle.

Se deja como ejercicio para el lector avanzado demostrar los siguientes dos teoremas que caracterizan a las funciones inyectivas y sobreyectivas.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función, *A* y *B* dos conjuntos no vacíos. Son equivalentes:

i) *f* es inyectiva (es decir: dados $x_1, x_2 \in A$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

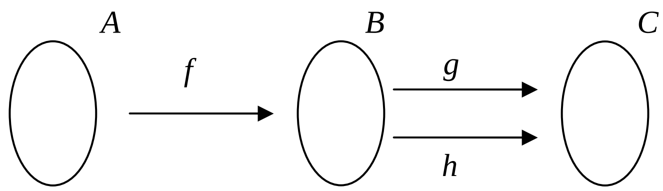
ii) Se cumple que para cualquier conjunto *C*, y cualesquiera dos funciones $g, h : C \to A$, si $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$. Diagramáticamente:



Teorema: Sea $f: A \to B$ una función, A y B dos conjuntos no vacíos. Son equivalentes:

i) f es sobreyectiva (es decir: si $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$).

ii) Se cumple que para cualquier conjunto C, y cualesquiera dos funciones $g, h: B \to C$, si $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$. Diagramáticamente:



El lector con conocimientos de álgebra notará que los conceptos expuestos en los ítems ii) del primer y segundo teorema son equivalentes a las nociones de *monomorfismo* y *epimorfismo* respectivamente.