NOTAS DE ANÁLISIS

(Según el programa de Análisis Matemático – Exactas/Ing. - del C.B.C. - U.B.A.)

Estas notas están dirigidas principalmente a un estudiante que se inicia en los estudios de la matemática universitaria. Contienen un resumen de los temas tratados en un curso de Análisis I. En estas notas sólo se enuncian algunas definiciones y los principales resultados, acompañados de algunos ejemplos, sin presentar demostraciones o justificaciones teóricas. Y concluye con una hoja de fórmulas que contiene una tabla con las derivadas, integrales e identidades trigonométricas más frecuentemente usadas.

Este apunte no pretende cubrir lo dictado en las clases ni mucho menos sustituir la cursada, sino más bien acompañar y reforzar los apuntes tomados y tal vez presentar otro enfoque y nuevos ejemplos.

PREELIMINARES

Definiciones: Algunas consideraciones sobre los conjuntos numéricos con los que se trabajará:

- Naturales: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ no daremos una definición formal de estos números.
- Enteros: $\mathbb{Z}=-\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ donde $-\mathbb{N}=\{-1,-2,-3,\ldots\}$ i.e. los naturales con signo opuesto.
- Racionales: $\mathbb{Q}=\left\{ {}^{a}/_{b} \;/ a\in\mathbb{Z} \;\; y \;\; b\in\mathbb{N}\right\}$ observemos que los números racionales son los números fraccionarios, para los cuales el denominador no se anula ya que es un número natural.
- Reales: $\mathbb{R}$ no daremos una descripción formal de los números reales, sólo diremos que son aquellos números con los que el alumno de secundario está acostumbrado a trabajar. Aceptaremos que son todas las posibles tiras de números que sepamos construir, como ser: 234,2341121356789900004 4…; 0,45454545…
- No entraremos en detalle sobre los números complejos $\mathbb{C}$.

Obs.: Con la notación anterior, tenemos que: $\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{C}$, es decir, vale la inclusión, pero no vale en ninguno de estos casos la igualdad.

Definición: Un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$ $(A\neq\varnothing)$ se dice acotado superiormente si existe un número real M tal que cualquiera sea $a\in A$, resulta que $a\leq M$. Un valor M como el hallado se llama una cota superior de A.

Definición: (análoga a la anterior) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ se dice acotado inferiormente si existe un número real m tal que cualquiera sea $a \in A$, resulta que $m \leq a$. Un valor m como el hallado se llama una cota inferior de A.

Definición: Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado superiormente posee una cota superior S que es menor que las demás. Es decir, cualquiera sea M cota superior de A, podemos afirmar que $a \leq S \leq M$ para todo $a \in A$. Un valor S como el hallado se llama el supremo de A (este valor es único).

Definición: (análoga a la anterior) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado inferiormente posee una cota inferior I que es mayor que las demás. Es decir, cualquiera sea m cota superior de A, podemos afirmar que $m \leq I \leq a$ para todo $a \in A$. Un valor I como el hallado se llama el ínfimo de A (este valor es único).

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente con supremo S decimos que S es el máximo del conjunto si $S \in A$. Es decir, si el supremo está dentro del conjunto lo llamamos máximo (este valor es único, por se único el supremo).

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente con ínfimo I decimos que I es el mínimo del conjunto si $I \in A$. Es decir, si el ínfimo está dentro del conjunto lo llamamos mínimo (este valor es único, por se único el ínfimo).

Definición: Llamaremos intervalos a los segmentos de la recta real.

Definición: Diremos que I es un intervalo cerrado si:
$I = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \right\} = [a,b]$

Definición: Diremos que I es un intervalo abierto si:
$I = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R} : a < x < b \right\} = (a,b)$

Definición: Diremos que I es un intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha si:
$I = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x < b \right\} = [a,b)$

Definición: Diremos que I es un intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha si:
$I = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R} : a < x \leq b \right\} = (a,b]$

Definición: Se dice que G es un conjunto abierto, si para cualquier elemento $g \in G$, se puede encontrar un intervalo abierto I que contenga a g, tal que I esté completamente contenido en el conjunto G. Usando notación matemática diremos que G es abierto si $\forall g \in G$, $\exists$ I intervalo abierto tal que $g \in I \subseteq G$. Claramente el inérvalo I depende de la elección de g.

Definición: Se dice que un conjunto F es un conjunto cerrado si su complemento $(F^c = \mathbb{R} - F)$ es abierto.

Obs.: Para ver esta idea pensemos en el intervalo $I = [a,b]$, su complemento se escribe como $I^c = \mathbb{R} - [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ que es unión de dos intervalos abiertos (se deja al lector hacer las demostraciones que se crean necesarias)

Proposición: El conjunto vacío $(\emptyset)$ es abierto

Proposición: El conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ es abierto.

Corolario: El conjunto vacío $(\emptyset)$ es cerrado

Corolario: El conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ es cerrado

Teorema (Principio de Arquimedeanidad): El conjunto formado por los números naturales $\mathbb{N}$, no está acotado superiormente. Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} (\subset \mathbb{R})$ tal que $n < m$.

Ejemplos: Dado el conjunto A, escribir A como intervalo o como unión de intervalo, graficarlo en la recta numérica. Calcular: $\sup(A)$, $\inf(A)$, y decidir si estos son máximos o mínimos.

- $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3 > -2x^2 + 1 \right\}$

  Comencemos considerando el conjunto dado: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3 > -2x^2 + 1 \right\}$

  Aquí, los *elementos del conjunto* son los $x \in \mathbb{R}$ y $2x^2 - 3 > -2x^2 + 1$ es *la condición* que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto A.

  Luego a partir de la condición despejamos:

  $2x^2 - 3 > -2x^2 + 1 \iff$

  $\iff 2x^2 - 3 - (-2x^2 + 1) > 0 \iff$

  $\iff 4x^2 - 4 > 0 \iff$

  $\iff 4(x^2 - 1) > 0 \iff$

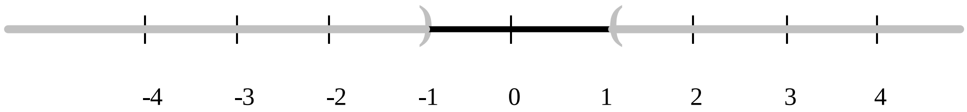
  $\iff x^2 > 1 \iff$

  $\iff |x| > 1 \iff$

  $\iff x > 1 \ \vee \ -x > 1 \iff$

  $\iff x < -1 \ \vee \ x > 1 \iff$

  $\iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



En este caso es claro que el conjunto obtenido no está acotado, tanto superior como inferiormente. Luego no tiene sentido hablar de supremo o ínfimo, ni máximos o mínimos, ya que para esto necesitamos que el conjunto esté acotado superior o inferiormente respectivamente.

- $A = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

Veamos ahora $A = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

Si calculamos los primeros términos de la sucesión (*) generada por los elementos del conjunto obtenemos:

$\left\{ \frac{n}{n^2+1} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}, \frac{8}{65}, \frac{9}{82}, \dots \right\}$

No es inmediato, pero mostraremos que $\sup(A) = \frac{1}{2}$ y que $\inf(A) = 0$.

Esto probablemente sea inmediato para el alumno que tenga conocimientos sobre límites (ya que esta sucesión es decreciente con límite cero). De todas maneras haremos el análisis completo:

Veamos que $\inf(A) = 0$: podemos observar primero que dado $e > 0$, $\exists\, a \in A$ tal que $0 < a < e$. Esto es claro por el *principio de arquimedeanidad* que nos indica que el conjunto de los números naturales no está acotado, luego como $\frac{n}{n^2+1} < e \Leftrightarrow n < e\left(n^2+1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e} < \frac{n^2+1}{n} = n + \left(\frac{1}{n}\right)$, pero esta última condición se satisface trivialmente ya que independientemente de cual sea el valor de $e > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N} \big/ \frac{1}{e} < n$ y por lo tanto $\frac{1}{e} < n + \left(\frac{1}{n}\right)$.

Volviendo teníamos que: para todo $e > 0$, $\exists\, a \in A / 0 < a < e$ luego hemos obtenido que el ínfimo del conjunto no puede superar a cero. Entonces $\inf(A) \leq 0$. Veamos que no es posible que sea $\inf(A) < 0$, ya que podemos encontrar un elemento x ajeno a A, que sea mayor que el ínfimo (basta tomar $x = 0$). Finalmente obtenemos que $\inf(A) = 0$. Y como $\inf(A) \notin A$, este conjunto no posee mínimo.

Veamos ahora que $\sup(A) = \frac{1}{2}$, esto es obvio ya que si fuera $\sup(A) > \frac{1}{2}$, dado un $e > 0$ y tomando $\sup(A) = \frac{1}{2} + e$, podemos encontrar $x = \frac{1}{2} + \frac{e}{2}$ que cumple que $\frac{1}{2} < x < \sup(A)$, y $x \notin A$, lo cual es absurdo. Y tomando $\sup(A) < \frac{1}{2}$, basta tomar $x = \frac{1}{2}$, y ver que $\sup(A) < x$ con $x \in A$, lo cual también es absurdo. Por lo tanto tenemos que $\sup(A) = \frac{1}{2}$. Y en este caso como $\sup(A) \in A$, este resulta ser un máximo del conjunto.

Se deja como ejercicio para el lector completar el ejercicio realizando el gráfico del conjunto en la recta. (Tener en cuenta que los puntos de este conjunto son puntos aislados)

(*) estudiaremos más adelante con mayor detalle estos elementos matemáticos

FUNCIONES

Definición: Diremos que (R) es una función si cumple las siguientes condiciones:

- A cada punto de A le asigna un punto de B
- Para un punto dado $a \in A$ fijo, si existen $b, b' \in B$ tales que $(a,b) \in R$ y $(a,b') \in R$ entonces $b = b'$.

Definición: Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que A es el dominio de f (notado como $Dom(f) = A$)

Definición: Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que B es el codominio de f (notado como $Cod(f) = B$)

Definición: Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que $f(A) \subseteq B$ es la imagen (o rango) de f (notado como $Im(f) = f(A)$)

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice inyectiva si dados $x_1, x_2 \in A$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice sobreyectiva (o suryectiva) si $\forall y \in B \ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Teorema: Sea $f : A \to B$ una función. Son equivalentes:

- f es sobreyectiva
- $f(A) = B$
- $Im(f) = Cod(f)$

Definición: Una función $f : A \to B$ se dice biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición: Una función f se dice par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio.

Obs.: Toda función par es simétrica respecto del eje Y.

Definición: Una función f se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio.

Obs.: Toda función par es simétrica respecto del origen.

Definición: Una función f se dice periódica con período p $(p > 0)$ si $f(x+p) = f(x)$ para todo x.

Obs.: El período de la función $y = A\sin(Bx+C)$ o $y = A\cos(Bx+C)$ es $\frac{2p}{|B|}$.

Su amplitud es $|A|$. El período de $y = \tan x$ es p.

Ejemplos:

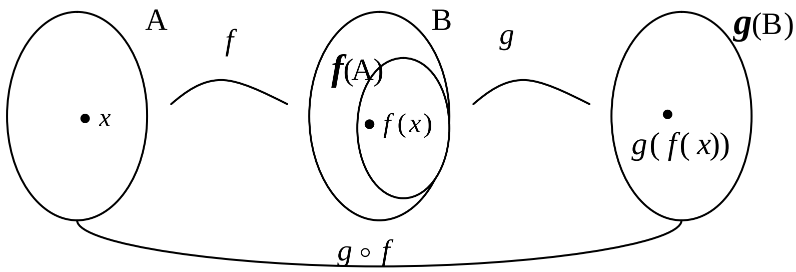
- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$, entonces si $m\neq 0$, f es sobreyectiva ya que dado $y_0\in\mathbb{R} = Cod(f)$, basta tomar $x_0 = {}^{y_0-b}\!/\!_m \in \mathbb{R} = Dom(f)$, y se verifica que $f(x_0) = y_0$, (observar que $Im(f) = Cod(f)$). f es inyectiva ya que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $mx_1+b = mx_2+b$, luego despejando $x_1 = x_2$. Por lo tanto f es biyectiva y se ve que como $f(a) = ma+b$ y como $f(-a) = m(-a)+b = -ma+b$, resulta ser par si $f(a) = f(-a) \Leftrightarrow m(-a)+b = ma+b \Leftrightarrow m(-a) = ma \Leftrightarrow 2ma = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Y resulta ser impar si $f(a) = -f(-a) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -m(-a)-b = ma+b \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Observar que la única función par impar a la vez es la función $f(x) = 0\ \ \forall x$.

- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2$, entonces f no es sobreyectiva ya que existe un valor $y_0\in\mathbb{R} = Cod(f)$ para el cual no existe $x_0\in\mathbb{R} = Dom(f)$ tal que $f(x_0) = y_0$, en este caso basta tomar $y_0 = -1$, y claramente no existe $x\in\mathbb{R} = Cod(f)$ tal que $f(x) = x^2 = y$, observar que $Im(f) = \mathbb{R}_{>0} \neq \mathbb{R} = Cod(f)$. Y f no es inyectiva ya que existen $x_1, x_2\in Dom(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, en este caso basta tomar $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, y se ve que $f(x_1) = (1)^2 = 1 = (-1)^2 = f(x_2)$. Por lo tanto f no resulta ser biyectiva. Se puede ver que $f(a) = a^2 = (-a)^2 = f(-a)$, luego f es par.

- Sea $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$. Se deja de ejercicio mostrar que f es biyectiva, y analizar los casos $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, con $f(x) = x^2$.

- Sea $f:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R}-\{b\}$, con $f(x)=\dfrac{2}{x-a}+b=\dfrac{bx+(2-ba)}{x-a}$, veamos que es biyectiva. Es sobreyectiva ya que $Im(f)=\mathbb{R}-\{b\}=Cod(f)$ (se deja de ejercicio verificar esto). Es inyectiva ya que si $f(x_1)=f(x_2)$ entonces $\dfrac{2}{x_1-a}+b=\dfrac{2}{x_2-a}+b \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1-a}=\dfrac{2}{x_2-a} \Leftrightarrow 2(x_2-a)=2(x_1-a) \Leftrightarrow x_2=x_1$. Por lo tanto f es biyectiva. Se deja como ejercicio para el lector verificar que f no es ni par ni impar.

Definición (Composición de Funciones): Sean $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ dos funciones. Definiremos la composición de g con f como $g\circ f$, tal que $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, es decir que g compuesta con f aplicada a un x funciona como aplicar g al resultado de haber aplicado f a x.



Teorema (de la Función Inversa): Sean $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(g(x))=x$ para todo x en el dominio de g y $g(f(x))=x$ para todo x en el dominio de f, entonces f y g son funciones inversas (se suele decir que g es la función inversa de f y se nota $g=f^{-1}$).

Teorema: Una función $f:A\to B$, con $A,B\subseteq\mathbb{R}$ admite inversa si y sólo si es biyectiva.

Teorema: Sea $f:A\to\mathbb{R}$ estrictamente creciente o decreciente en un intervalo, entonces f admite inversa.

Ejemplos:

- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+b$, $m,b\in\mathbb{R}$, como f es biyectiva si $m\neq 0$, entonces admite inversa. Calculemos f^{-1}: tomo $y=mx+b$ y despejamos. $y=mx+b \Leftrightarrow y-b=mx \Leftrightarrow \dfrac{y-b}{m}=x$ ya que $m\neq 0$, luego $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se define como $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{m}$.

- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, como f no es biyectiva no admite inversa.

- Sea $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x)=x^2$. Se deja de ejercicio mostrar que existe f^{-1} definida como $f^{-1}:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ y que $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ y analizar los casos $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, con $f(x)=x^2$.

- Sea $f:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R}-\{b\}$, con $f(x)=\dfrac{2}{x-a}+b=\dfrac{bx+(2-ba)}{x-a}$. Hemos visto que es biyectiva luego admite inversa y despejando obtenemos que como $y=\dfrac{2}{x-a}+b\Leftrightarrow y-b=\dfrac{2}{x-a}\Leftrightarrow x-a=\dfrac{2}{y-b}$ (ya que $y-b\neq 0$, porque $b\notin Cod(f)$) $\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{y-b}+a$, luego existe f^{-1} definida como $f^{-1}:\mathbb{R}-\{b\}\to\mathbb{R}-\{a\}$ donde $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-b}+a$

SUCESIONES

Definición: Definimos una sucesión como una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ donde a cada elemento $f(n)$ lo llamamos a_n.

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L, es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ si $\forall e>0,\ \exists n_0$ tal que $\forall n\geq n_0$ $|a_n-L|<e$.

Definición: Si $L\in\mathbb{R}$, entonces se dice que la sucesión converge a L.
Si $L=\infty$ se dice que la sucesión diverge.
Si no existe el límite (ni finito ni infinito) se dice que la sucesión es oscilante.

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ se dice acotada inferiormente si $\exists\, m>0$ tal que $a_n\geq m\ \forall n\in\mathbb{N}$.
Análogamente se dice acotada superiormente si $\exists\, M>0$ tal que $a_n\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}$.
Si las dos anteriores se cumplen simultáneamente decimos que $\{a_n\}$ está acotada.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n=L\in\mathbb{R}$ y su límite es único.

Proposición: Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n\neq a$, entonces $\exists n_0$ tal que $a_n\neq a\ \forall n\geq n_0$.

Teorema (Álgebra de Límites): Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, entonces valen los siguientes resultados:

- $\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.a$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = a.b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = a / b$, si $\exists n_0$ tal que $\forall \text{n} \geq n_0$ $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$

Teorema (del sandwich): Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema: Toda sucesión convergente es acotada.

Teorema: Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada, entonces posee una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ convergente.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces L es una cota superior de $\{a_n\}$ (más aún, es el supremo).

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

En particular tomando $a_n = n$ se obtiene $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Teorema: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones acotadas tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(a_n)}{a_n} = 1$

Algunos límite útiles: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} x^{(1/n)} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

Definición: Sea $f:(a,b)-\{x_o\}\to\mathbb{R}$ y sea $L\in\mathbb{R}$. Entonces $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L$ si $\forall$ $e>0$, $\exists\, d>0$ tal que $0<|x-x_o|<d$ entonces $|f(x)-L|<e$. (Es importante en este caso tener en cuenta que el valor buscado $d=d(e,x_o)$, es decir d no sólo depende de e sino también de x_o)

Propiedades (Límites de funciones racionales en el infinito):

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ si el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$

  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^3+3}=0$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es infinito si el grado de $f(x)$ es mayor que el grado de $g(x)$

  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x}{x^2-8}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es infinito si el grado de $f(x)$ es igual al grado de $g(x)$

  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{10x-5x^2}=-\dfrac{2}{5}$

Definición: Sea $f:A\to\mathbb{R}$ con $A\subseteq\mathbb{R}$. Entonces f se dice continua en x_0 si $\forall$ $e>0$, $\exists\, d>0$ tal que si $|x-x_o|<d$ entonces $|f(x)-L|<e$. (Es importante en este caso tener en cuenta que el valor buscado $d=d(e,x_o)$, es decir d no sólo depende de e sino también de x_o)
Si f resulta continua para todos los valores del dominio, se dice que f es continua, o que f es continua en A .

Teorema: Dada $f:A\to\mathbb{R}$ con $a\in A\subseteq\mathbb{R}$, son equivalentes:

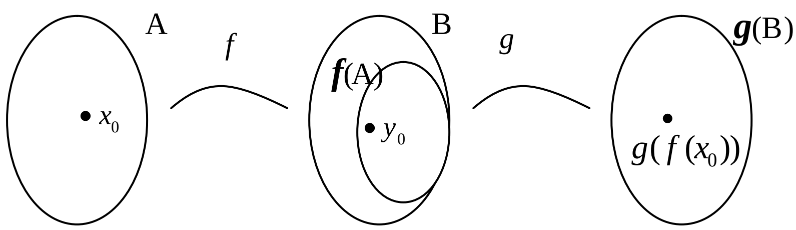
- f es continua en $x=a$
- $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Teorema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\in[a,b]$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)=f(L)$.

Teorema (Álgebra de Límites): Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in B \subseteq \mathbb{R}$ y tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$ con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces valen los siguientes resultados:

- $\lim_{x \to x_0} k.\, f(x) = k.a$, $\forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = a - b$
- $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = a.b$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) / g(x) = a / b$, si $\exists d > 0$ talque $\mathrm{g}(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$ y $b \neq 0$

Teorema: Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$ y tales que f sea continua en $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ y g sea continua en $f(x_0) = y_0 \in B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.



Teorema (del valor medio): Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Obs (Teorema de Bolzano): Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo abierto (a,b).

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en A, cerrado y acotado, entonces $\exists\, M, m$ constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in A$.

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en A, cerrado y acotado, entonces $\exists\, x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in A$.

Corolario (Teorema del Máximo y Mínimo): Sea f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo en $[a,b]$. (Esto realmente no es un corolario sino una reformulación del teorema anterior)

Teorema: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$ una función tal que $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x \to x_o} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$.

En particular tomando $f(x) = x$ y $x_0 = \infty$ se obtiene $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Teorema: Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$ dos funciones acotadas tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

Teorema: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$ una función tal que $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$

DERIVADAS

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f: A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es derivable en el punto $x_0 \in A$ si existe $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ o, equivalentemente, si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

En este caso decimos que

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ y a este valor lo denominamos la derivada de f en x_0.

Si f es derivable en todos los puntos de A decimos que f es derivable, o que f es derivable en A.

Ejemplo (Aplicación de la definición de derivada al cálculo): consideremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$ constantes, luego f es lineal. Entonces f' (su función derivada) resulta ser $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = m$.

Veamos esto: adoptando la primera definición tenemos que $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, en nuestro caso $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(m(x_0 + h) + b) - (mx_0 + b)}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{m(x_0 + h) - mx_0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$, luego como f es derivable en todo su dominio, $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = m$

Obs (Recta tangente): Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en x_0 con $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, entonces la aproximación linear de f cerca de $x = x_0$ está dada por: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ para x suficientemente cerca de x_0.

Teorema (Rolle): Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Lagrange): Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Teorema (Cauchy): Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $g'(c)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(c)\left(g(b) - g(a)\right)$.

Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b),

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a,b), entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Teorema: Supongamos que existe $f''(x)$ en (a,b),

- Si $f''(x) > 0$ en (a,b), entonces f tiene concavidad positiva en (a,b).
- Si $f''(x) < 0$ en (a,b), entonces f tiene concavidad positiva en (a,b).

Obs.: Para encontrar los puntos de inflexión de f, buscar los puntos donde se satisface $f''(x) = 0$ o donde $f''(x)$ no está definida. Estos son los únicos candidatos donde .
f puede tener puntos de inflexión. Luego verificar que $f''(x) < 0$ de un lado y $f''(x) > 0$ del otro.

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en x_0 con $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, entonces es continua en ese punto.

Obs.: Es claro que la implicación inversa es falsa (pensar en $|x|$ y tomar x=0), en otras palabra la continuidad no implica la derivabilidad.

Teorema (Álgebra de derivadas): Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ derivables en x_0 con $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, entonces valen los siguientes resultados:

- $\left(k.f(x) \right)' = k.f'(x)\ ,\ \forall k \in \mathbb{R}$ constante
- $\left(f(x) + g(x) \right)' = f'(x) + g'(x)$
- $\left(f(x) - g(x) \right)' = f'(x) - g'(x)$
- $\left(f(x).g(x) \right)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(f(x)/g(x) \right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$, si $\exists d > 0$ talque $g(x) \neq 0\ \forall x \in (x_0 - d\ , x_0 + d)$

Teorema (Regla de L´Hôpital): Sean $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R}$ derivables en x_0 con $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, y si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplo: Calculemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)\ln x}{x^2}$, como esto resulta ser una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, podemos resolver este límite mediante el teorema anterior: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)\ln x}{x^2} =$

$$= \underset{\text{L´Hôp.}}{\lim_{x\to\infty}} \frac{\frac{(x+1)}{x} + \ln x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{(x+1)}{x}}{2x} + \frac{\ln x}{2x} \right) = \underset{\text{L´Hôp.}}{\lim_{x\to\infty}} \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{2x} \right) = 0 .$$

Teorema (Regla de la Cadena): Sean $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$ y tales que f sea derivable en $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ y g sea derivable en $f(x_0) = y_0 \in B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y $\left(g \circ f \right)'(x_0) = g'(f(x_0)).g'(x_0)$.

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en un intervalo $I \subseteq A$, y $f'(x) \neq 0$ en I, entonces $g = f^{-1}$ está bien definida y es derivable en cada punto de $f(I)$ (notar que $f(I)$ es también un intervalo) y $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Aplicación de las Derivadas al Estudio de Funciones

1) *Tratamiento Preeliminar*
   Se comienza calculando $Dom(f)$, determinando con qué tipo de función estamos trabajando (polinómicas, exponenciales, logarítmicas, ninguna de ellas…).

2) *Asíntotas Horizontales, Verticales y Oblicuas*
   a. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal del gráfico de f si

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

b. La recta $x = a$ es una asíntota vertical del gráfico de f si

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^-} = \pm\infty$.

c. La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a derecha del gráfico de f si

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = b$, $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, análogamente a izquierda.

3) *Extremos*
Para encontrar los valores máximos y mínimos de f :

1. calcular los valores de x tales que $f'(x)$ es cero o donde $f'(x)$ no existe (conjunto de puntos críticos de f).
2. calcular los valores en los extremos del intervalo.

4) *Intervalos de Crecimiento y de Decrecimiento*
Con los resultados obtenidos de *3)* 1. y conociendo los puntos de discontinuidad de f' podemos estudiar los intervalos de positividad y negatividad de f' usando el contrarecíproco del teorema de Bolzano.

Obs.: Notar que estos son los únicos lugares donde la función puede tener extremos.

5) *(optativo)* Hacer una tabla donde se coloquen los puntos distinguidos correspondientes a la función y a su derivada (por ejemplo puntos fuera del dominio de f o de f', o puntos de nulidad de f o de f').

6) Analizar los cambios concavidad de f en los distintos subintervalos mediante es estudio de f''.

7) *(optativo)* Agregar a la tabla los datos obtenidos para f''.

8) *Gráfico*
Con la información obtenida realizar un gráfico aproximado de f .

Corolario1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, donde $f(x) = e^x$, entonces:

- Las funciones $f(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = \ln(x)$ son inversas.
- Su dominio es el conjunto de todos los números reales (y los reales positivos para la segunda).
- Por lo tanto la imagen de la función $f(x) = e^x$ coincide con el dominio de la función $y = \ln x$.

- $\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x$
- $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$
- $f(x) = e^x$ es continua, creciente, y de concavidad positiva en todo el dominio.
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $e^{\ln x} = x$, para $x > 0$; $\ln(e^x) = x$ para todo x.

Corolario2: Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(x)$, entonces:

- El dominio de $f(x) = \ln(x)$ Es el conjunto de todos los reales positivos.
- La imagen es el conjunto de todos los reales.
- $f(x) = \ln(x)$ es continua, creciente y con concavidad negativa en todo su dominio.
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, si $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, si $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.
- $\ln a^r = r \ln a$, si $a \in \mathbb{R}_{>0}$.
- $f(x) = \ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$.
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

POLINOMIO DE TAYLOR

Definición: Sea f *n+1* veces derivable en (a,b). Llamamos P_n y R_n al polinomio de Taylor de orden n centrado en el punto x_0 y su correspondiente resto. Donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ y

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ con x entre x_0 y x.

Definición: En el caso anterior si tomamos $x_0 = 0$ como punto donde se centrará el desarrollo, decimos que $P_n(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$ es el desarrollo de Maclaurin de f de orden *n*.

Ejemplo: Consideremos $f(x)=e^x$, desarrollemos P_n de Maclaurin y estimemos R_n en $x=2$

$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$ y como $R_n(x)=\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$, entonces:

$|R_n(x)|=\left|\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{e^2 2^{n+1}}{(n+1)!}$ ya que como $x_0=0\le x\le 2=x$ tenemos que $\left|e^x x^{n+1}\right|\le e^2 2^{n+1}$.

Teorema: Sea f *n+1* veces derivable en (a,b), y sea R_n el resto de orden n de Taylor, entonces $\lim_{x\to x_o}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Esto indica que un polinomio de Taylor de orden n es una buena aproximación para valores cercanos de x_0.

INTEGRALES

Definición: Sea f continua en $[a,b]$. Consideremos una partición regular en n subintervalos del intervalo original, de longitud $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Consideremos $M_i=\sup\{f(x)/x\in \text{i-ésimointervalo}\}$ y $m_i=\inf\{f(x)/x\in \text{i-ésimointervalo}\}$. Definimos $\underset{\inf}{\int_b^a} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x$ y la llamamos la integral inferior. Análogamente definimos $\underset{\sup}{\int_b^a} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x$

Si ambas coinciden decimos que f es integrable y llamamos a ese valor la integra definida. Dicho de otra forma: si $\underset{\sup}{\int_b^a} f(x)dx=\underset{\inf}{\int_b^a} f(x)dx$ entonces esto es $\int_a^b f(x)dx$

Propiedades (de la Integral Definida): Sean f y g continuas en $[a,b]$.

- $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$ para toda constante c.
- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, donde f es continua en un intervalo que contiene a a, b, y c.
- Si $f(x)$ es una función par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
- Si $f(x)$ es una función impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $g(x) \geq f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y acotada en $[a,b]$ (salvo quizá en un número finito de puntos), entonces f es integrable en $[a,b]$.

Teorema (Fundamental del Cálculo): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrable sobre $[a,b]$ y continua en $x_o \in [a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ donde $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (a esta función F se la llama una primitiva de f).

Teorema (Regla de Barrow): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua sobre $[a,b]$ y $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Teorema (del Valor Medio): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, su promedio en $[a,b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. O equivalentemente $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$

Teorema: Sean $g, f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b]$, entonces el área encerrada entre las curvas $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ integrable en A, y sea $F: A \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Definimos $\int f = \int f(x)dx = F(x) + c$ como el conjunto de todas las primitivas de f, y lo llamamos la integral indefinida de f. (Suele ser conveniente pensar que $\int f$ es una función que representa cualquier primitiva de f).

Teorema (Método de Integración por Partes): Sean g, $f : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y si $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas, entonces $\int u\, dx = uv - \int v\, du$.
Se suele escribir: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Obs.: Lo interesante de este procedimiento es elegir u y dv de forma tal que $\int v\, du$ sea más fácil de resolver que la integral original.

Sugerencia: Cuando uno elige u, podemos emplear una regla mnemotécnica **I.L.P.E.T.**, donde **I** corresponde a las funciones inversas, **L** a las logarítmicas, **P** a la funciones polinómicas, **E** a las exponenciales y **T** a las trigonométricas.

Ejemplo: si queremos calcular $\int xe^x\, dx$ usando la segunda expresión del método obtenemos $\int xe^x\, dx = xe^x - \int 1.e^x\, dx = xe^x - e^x + c$, tomando $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

Definición: Dada f decimos que $\int_a^b f(x)\, dx$ es una integral impropia de f si:

- f se hace infinita en uno o más de un punto del dominio de integración, o
- uno o ambos límites de integración es infinito, o
- valen los item 1 y 2 a la vez.

Aplicación de las Integrales al cálculo de:

1) Volumen de Sólidos de Revolución
Sea f no negativa y continua en $[a,b]$, y sea R una región acotada por encima por $y = f(x)$, por debajo por el eje x y a ambos lados por las rectas $x = a$ y $x = b$.

- Cuando la región R es rotada alrededor del eje x, denera un sólido (cuerpo tridimensional) (cuya intersección con los planos $x = c$, $a \le c \le b$ es circular circulares) cuyo volumen está dado por $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$.

- Cuando R es rotado alrededor del eje y, genera un sólido cuyo volumen está dado por $V = \int 2p\; xf(x)\,dx$ .En este caso su intersección con los planos $y = c$, $f(a) \le c \le f(b)$ es circular.

2) Integrales mediante Sustituciones Trigonométricas

- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea $u = a\sin q$. Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos q$ donde $-\frac{p}{2} \le q \le \frac{p}{2}$.
- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea $u = a\tan q$. Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec q$ donde $-\frac{p}{2} \le q \le \frac{p}{2}$.
- Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea $u = a\sec q$. Entonces $\sqrt{u^2 - a^2} = \pm a\tan q$ donde $0 \le q < \frac{p}{2}$ or $\frac{p}{2} < q \le p$. Usar la valuación positiva si $u > a$; y la negativa si $u < -a$.

3) Longitud de Arco

Dada f una función que representa una curva suave en $[a,b]$ (esto quiere decir que la función sea derivable con derivada continua, aunque en realidad basta pedir que esto ocurra en todo el dominio salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces la longitud de del arco de f entre a y b está dado por: $long(f,a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

SERIES

Definición: Definimos una suma parcial como una suma de términos de una sucesión, es decir, $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, que representa la suma de los primeros N términos de la sucesión $\{a_n\}$.

Definición: Definimos la serie de $\{a_n\}$ al límite de la suma parcial S_N, es decir:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Teorema: La Serie harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Teorema: La Serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge a $\frac{a}{1-r}$ si $|r|<1$ y diverge si $|r|\geq 1$ y $a\neq 0$.

Teorema: Las series-p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergen si $p>1$ y divergen si $p\leq 1$.

Teorema (Criterio de Comparación Vía Límite): Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos, con $a_n \neq 0$ para todos los n suficientemente grandes, y supongamos que:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c > 0$, entonces, ambas series convergen o ambas divergen.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Teorema (Criterio de Leibniz para Series Alternadas): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que

- La serie es alternada
- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ para todo n, y
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Entonces la serie converge.

Definición: Una serie $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ converge. Si $\sum a_n$ converge, pero $\sum |a_n|$ no converge, entonces la serie es condicionalmente convergente.

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges (es decir que la serie es absolutamente convergente), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Teorema (Criterio de Comparación): Si $0 \le a_n \le b_n$ para todos los n suficientemente grandes, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Teorema (Criterio de la Integral de Cauchy): Sea f una función positiva, continua y decreciente en $[1,\infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Y si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema (Criterio de D´Alembert): Sea $\sum a_n$ una serie sin términos nulos.

- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces la serie converge absolutamente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, entonces el criterio no sirve.

Definición (Series de Potencias): Llamamos series de potencias a aquellas de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$ ó $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n =$
$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$ en donde a es el punto donde etá centrada la serie y los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son constantes. El conjunto formado por los valores de x para los cuales la serie numérica converge es llamado el intervalo de convergencia.

Definición (Series de Taylor): Sea f una función con infinitas derivadas en un entorno de a. Entonces la serie de Taylor generada por f en a es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$

$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$. Los terminos restantes luego de la *n*-ésima derivada pueden ser expresados como el resto de Taylor

Teorema (del Resto de Taylor): Sea f cuyo desarrollo de orden N es:

$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_N(x)$ donde $R_N(x) = \frac{1}{N!}\int_a^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t)\, dt$

Fórmula de Lagrange del Resto de Taylor): $R_N x = \frac{f^{(N+1)}(c)(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}$, donde $a < c < x$.

Obs.: La serie converge para todos los valores de x donde el resto tiende a cero.

Ejemplos (Series Útiles):

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-x)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $|x| < \infty$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x| < \infty$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < \infty$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $-1 < x \le 1$
- $Arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$

HOJA DE FÓRMULAS

Fórmulas Trigonométricas

1. $\sin^2 q + \cos^2 q = 1$
2. $1 + \tan^2 q = \sec^2 q$
3. $1 + \cot^2 q = \csc^2 q$
4. $\sin(-q) = -\sin q$
5. $\cos(-q) = \cos q$
6. $\tan(-q) = -\tan q$
7. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
8. $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$
9. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
10. $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
11. $\sin 2q = 2 \sin q \cos q$
12. $\cos 2q = \cos^2 q - \sin^2 q = 2\cos^2 q - 1 = 1 - 2\sin^2 q$
13. $\tan q = \dfrac{\sin q}{\cos q} = \dfrac{1}{\cot q}$
14. $\cot q = \dfrac{\cos q}{\sin q} = \dfrac{1}{\tan q}$
15. $\sec q = \dfrac{1}{\cos q}$
16. $\csc q = \dfrac{1}{\sin q}$
17. $\cos(\dfrac{p}{2} - q) = \sin q$
18. $\sin(\dfrac{p}{2} - q) = \cos q$

Fórmulas de Derivación

1. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
2. $\dfrac{d}{dx}(fg) = fg' + gf'$
3. $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{f}{g}) = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$
4. $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
5. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
7. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
8. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
9. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
10. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
11. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
12. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
13. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$
14. $\dfrac{d}{dx}(Arc \sin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\dfrac{d}{dx}(Arc \tan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $\dfrac{d}{dx}(Arc \sec x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \times \dfrac{du}{dx}$ *Regla de la Cadena*

Fórmulas de Integración

1. $\int a\,dx = ax + C$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
9. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$ or $-\ln|\cos x| + C$
10. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
12. $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
13. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
14. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
15. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
16. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
17. $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$
18. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} Arc\tan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Arc\sin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} Arc\sec\dfrac{|x|}{a} + C = \dfrac{1}{a} Arc\cos\left|\dfrac{a}{x}\right| + C$