

## Práctica 1: Preliminares

---

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) |x + 3| < 1 & b) |3x - 1| < |x - 1| & c) |x - 3| \geq 1 \\ d) |x| > |x + 3| & e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1 & \end{array}$$

2. Representar los siguientes conjuntos en  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} a) \{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\} & b) \{x : |x - 3| < |2 - x|\} \\ c) \{x : 0 < x^2 \leq x^3\} & \end{array}$$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$\begin{array}{l} (a) A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}; \\ (b) B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}; \\ (c) C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}. \end{array}$$

4. Sea  $a \geq 0$ . Determinar para qué valores de  $b$  se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ll} a) |a + b| = |a| + |b| & b) |a + b| < |a| + |b| \\ c) |a - b| = |a| + |b| & d) |a - b| < |a| + |b| \\ e) ||a| - |b|| = |a - b| & f) ||a| - |b|| < |a - b| \end{array}$$

5. Sean  $a$  y  $b$  números reales. Decidir para qué valores de  $a$  y de  $b$  son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

$$\begin{array}{ll} a) a < a^2 & b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b. & d) a + b \geq \max\{a, b\} \end{array}$$

6. Sean  $0 \leq x \leq y$ . Probar que  $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$ .

7. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- i.  $\mathbb{R}_{>0}$ ;  
 ii.  $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$ .
- (b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
- i.  $\mathbb{Z}$ ;  
 ii.  $\{x^{-1} : x < 0\}$ ;  
 iii.  $\text{Im}(f)$  donde  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ .
8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:
- a)  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$       b)  $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$   
 c)  $A = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$       d)  $A = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$
9. (a) Considerar el conjunto  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$ . Calcule su supremo y concluya que  $A$  no tiene máximo.  
 (b) Dado el conjunto  $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$ , calcule su ínfimo y concluya que  $B$  no tiene mínimo.
10. Calcular
- a)  $\sup \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$       b)  $\sup \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$   
 c)  $\inf \{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$       d)  $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$
11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):
- (a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  entonces  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > 0$  para todo  $n \geq n_0$ .  
 (c) Si  $a_n < 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .  
 (d) Si  $a_n < 2 - \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .
12. Calcular  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$  y determinar, para cada  $\varepsilon > 0$  de la siguiente tabla, un valor  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que  $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$  si  $n > n_0$ .

$\varepsilon$	0,1	0,027	0,00001	$10^{-6}$
$n_0$				

13. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

Sugerencia: Notar que  $a_n$  y  $b_n$  constan de  $n + 1$  términos. Usar el principio de comparación.

14. Sea  $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$ .

- (a) Encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumpla que  $3 < a_n < 5$ .  
 (b) Encontrar, si existen,  $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

15. Sean  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $a_0 > b_0 > 0$ . Se consideran las sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a)  $a_n \geq b_n$  para todo natural  $n$ .  
 (b)  $\{a_n\}_n$  es decreciente y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.  
 (c)  $\{a_n\}_n$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

16. Sea  $a_0$  un número positivo. Se define la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_{n+1} := \operatorname{sen}(a_n).$$

Probar que  $\{a_n\}_n$  es una sucesión convergente y calcular su límite.

17. (a) Probar que  $(\sum_{j=0}^n q^j) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(b) Calcular  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$  y  $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$ .

18. (a) Probar que  $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ . Sugerencia: Sumar el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

(b) Sea  $\{k_n\}_n$  una sucesión de números naturales crecientes. Sea

$$a_n := \frac{k_1 + \cdots + k_n}{k_n^2},$$

probar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene que  $a_n \leq 1/2 + \varepsilon$ .

Métricas y topología en  $\mathbb{R}^n$ 

19. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en  $\mathbb{R}^2$ . Representar las soluciones en el plano.

a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$

h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

20. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  y  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ . Mostrar que si  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

(a)  $|x_i| \leq \|x\|_2$ , si  $i = 1, \dots, n$ ;

(b)  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ ;

(c)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ . Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

21. (a) Mostrar que los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son abiertos

i.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$ ;

ii.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$ ;

iii.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$ .

(b) Dar un ejemplo de un conjunto en  $\mathbb{R}^3$  que no sea ni abierto ni cerrado.

22. Representar gráficamente los siguientes conjuntos  $A$ .

(a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$

(b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$

(c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$

(d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$ ;

(e)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$ .

23. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son cerrados y acotados:

(a)  $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ;

(b)  $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

(c)  $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ ;

(d)  $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ;

(e)  $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$ .

24. Calcular  $\partial A$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{A} \setminus A$  y  $A \setminus \partial A$  para los conjuntos  $A$  que aparecen en el ejercicio 22.