

---

# ÁLGEBRA II

## Segundo Cuatrimestre — 2008

### Práctica 2: Grupos: homomorfismos, cocientes y productos

---

#### 1. Homomorfismos

1.1. Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Sea  $x_0 \in X$  y sea

$$\text{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

1.2. Mostrar que cualquiera sea el grupo  $G$ , existe un isomorfismo  $G \cong G^{\text{op}}$  entre  $G$  y su grupo opuesto.

1.3. Sean  $G$  y  $H$  grupos, y sea  $\text{hom}_{\text{Grp}}(G, H)$  el conjunto de todos los homomorfismos  $f : G \rightarrow H$ . ¿Se trata en general de un subgrupo de  $H^G$ ? Encuentre condiciones sobre  $H$  que garanticen que lo sea.

1.4. Muestre que el grupo  $\mathbb{H}$  del ejercicio 2.2 y el grupo  $\mathbb{H}_1$  del ejercicio 3.6, de la páctica 1, son isomorfos.

1.5. Sea  $G$  un grupo.

- (a) Sea  $g \in G$  e  $\text{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$ . Mostrar que  $\text{inn}_g \in \text{Aut}(G)$ .
- (b) Mostrar que la aplicación  $\text{inn} : g \in G \mapsto \text{inn}_g \in \text{Aut}(G)$  es un homomorfismo de grupos.
- (c) Describir el núcleo de  $\text{inn}$ . Los automorfismos que están en la imagen de  $G$  se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota  $\text{Inn}(G)$ .
- (d) Mostrar que  $\text{Inn}(G)$  es un subgrupo normal de  $\text{Aut}(G)$ .

1.6. Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos.

- (a) Si  $H$  es abeliano, entonces  $[G, G] \subset \ker f$ .
- (b) Mostrar que  $f([G, G]) \subset [H, H]$ . En particular, concluya que  $[G, G]$  es un subgrupo característico de  $G$ .

1.7. Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que  $f(Z(G)) \subset Z(H)$ ? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es  $f(Z(G)) = Z(H)$ ?

1.8. Sea  $G$  un grupo.

- (a) Mostrar que la función  $\text{ev}_1 : f \in \text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$  es una biyección.
- (b) Describir  $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$  y, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$ .

1.9. (a) Determinar  $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  y  $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$  para un grupo finito  $G$ .

- (b) Describir la imagen  $D(G)$  de  $\text{ev}_1 : f \in \text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$ .
- (c) Mostrar que cuando  $G$  es abeliano,  $D(G)$  es un subgrupo característico de  $G$ .

1.10. Sea  $G$  un grupo.

- (a) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre  $G$  para que la aplicación  $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$  resulte un homomorfismo de grupos.

- (b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre  $G$  para que la aplicación  $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$  resulte un homomorfismo de grupos.
- (c) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre  $G$  para que la aplicación  $g \in G \mapsto g^2 \in G$  resulte un homomorfismo de grupos.
- 1.11.** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ . Si  $(m, n) = 1$ , entonces  $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$  es trivial. ¿Qué sucede en general?
- 1.12.** Sea  $G$  un grupo finito y  $\phi : G \rightarrow G$  un endomorfismo de  $G$ .
- (a) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq n$ , entonces  $\phi^m(G) = \phi^n(G)$ . Sea  $\alpha = \phi^n$ .
- (b) Mostrar que  $\text{im } \alpha$  es normal o dar un contraejemplo.
- 1.13.** Usando el hecho que  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  permuta los elementos no nulos de  $\mathbb{F}_2^2$ , encuentre un isomorfismo  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ .
- 1.14.** (a) Sea  $G$  un grupo y sea  $X \subset G$  un subconjunto tal que  $\langle X \rangle = G$ . Sea  $f \in \text{End}(G)$  tal que  $f(x) = x$  para todo elemento  $x \in X$ . Entonces  $f = \text{id}_G$ .
- (b) Sea  $X$  el conjunto de los elementos de orden 2 de  $S_3$ . Muestre que cada automorfismo de  $S_3$  induce una permutación de  $X$  y deduzca que  $\text{Aut}(S_3) \cong S_3$ .
- 1.15.** Sea  $n \geq 2$ . Consideramos el polinomio *discriminante*

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

Si  $\pi \in S_n$  es una permutación de  $\{1, \dots, n\}$ , definimos

$$\varepsilon(\pi) = \frac{\Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

- (a) Mostrar que cualquiera sea  $\pi \in S_n$ , es  $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$ .
- (b) Mostrar que  $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  es un homomorfismo de grupo si dotamos a  $\{\pm 1\}$  del producto usual.
- El subgrupo  $A_n = \ker \varepsilon$  es el  $n$ -ésimo grupo *alternante*.
- (c) Describir  $A_2$  y  $A_3$ .
- (d) Sea  $\tau = (ij) \in S_n$  una transposición. Determinar el valor de  $\varepsilon(\tau)$ .
- (e) Recordemos que todo elemento  $\pi \in S_n$  puede ser escrito—de muchas maneras—como producto de transposiciones. Muestre que la paridad del número de transposiciones empleadas depende solamente de  $\pi$ .

Una permutación que puede escribirse de alguna forma como un producto de un número par de transposiciones se dice *par*.

- 1.16.** *Automorfismos de  $\mathbb{H}$ .*
- (a) Determine todos los automorfismos interiores de  $\mathbb{H}$ .
- (b) De ejemplos de automorfismos de  $\mathbb{H}$  no interiores.
- (c) Muestre que  $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$ .

## 2. Cocientes

- 2.1.** Mostrar que
- (a)  $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}^+ \cong S^1$ ;
- (b)  $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$  cualquiera sea  $m \in \mathbb{N}$ ;
- (c)  $\text{GL}_n(k) / \text{SL}_n(k) \cong k^\times$  si  $k$  es un cuerpo y  $n \in \mathbb{N}$ ;

- (d)  $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$  si  $n \in \mathbb{N}$ ;  
 (e) si  $m|n$ ,  $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$ .

2.2. Si  $G$  es un grupo no abeliano, entonces  $G/Z(G)$  no es cíclico.

*Sugerencia.* Use el ejercicio 3.14 de la práctica 1.

2.3. Muestre que  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ .

2.4. Si  $G$  es un grupo y  $H$  y  $K$  son subgrupos normales de  $G$ , muestre que  $G/(H \cap K)$  es isomorfo a un subgrupo de  $G/H \times G/L$ .

2.5. Dado un grupo  $G$ , el grupo  $\text{Out}(G)$  de automorfismos exteriores de  $G$  es el cociente  $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ ; recordemos que en el ejercicio 1.5(d) vimos que  $\text{Inn}(G)$  es normal en  $\text{Aut}(G)$ . Es importante observar que los elementos de  $\text{Out}(G)$  no son automorfismos de  $G$ .

Determinar  $\text{Out}(G)$  cuando  $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$ .

2.6. Sea  $G$  un grupo y sea  $H$  un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de  $H$  en  $G$  no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

### 3. Productos

3.1. Sean  $U$  y  $V$  dos grupos. Sean además  $f : U \rightarrow W$  y  $g : V \rightarrow W$  dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación  $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in W$  es un homomorfismo de grupos si y solo si todo elemento de  $f(U)$  conmuta con todo elemento de  $h(V)$ .

3.2. Si  $G$  y  $H$  son grupos, determine  $Z(G \times H)$ .

3.3. *Producto directo interno.* Sea  $G$  un grupo.

- (a) Sean  $N$  y  $M$  dos subgrupos normales de  $G$  y supongamos que  $N \cap M = 1$  y  $G = NM$ . Mostrar que entonces es  $G \cong N \times M$ .  
 (b) Supongamos que  $G$  es grupo finito de orden  $mn$  con  $(m, n) = 1$ . Si  $G$  posee exactamente un subgrupo  $N$  de orden  $n$  y exactamente un subgrupo  $M$  de orden  $m$ , entonces  $G$  es isomorfo al producto directo de  $N$  y  $M$ .

†(c) Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $(N_i)_{i=1}^k$  una familia de subgrupos normales de  $G$  tales que  $G = \langle \bigcup_{i=1}^k N_i \rangle$  y para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces  $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$ .

†(d) Otra vez, supongamos que  $G$  es finito y sean  $N_1, \dots, N_k$  subgrupos normales de  $G$  de órdenes  $r_1, \dots, r_k$  tales que  $(r_i, r_j) = 1$  si  $1 \leq i, j \leq k$  y  $|G| = r_1 \dots r_k$ . Entonces  $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$ .

3.4. *Producto semi-directo.*

- (a) Sean  $G$  y  $N$  grupos y sea  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  un homomorfismo de grupos. Sea  $K = N \rtimes G$  y consideremos el producto en  $K$  dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \quad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto,  $K$  es un grupo.

Llamamos al grupo  $K$  construido el *producto semi-directo (o cruzado) de  $N$  por  $G$  con respecto a  $\theta$*  y lo notamos  $N \rtimes_{\theta} G$ .

- (b) Encontrar homomorfismos ‘naturales’ de grupo  $\iota : N \rightarrow N \rtimes_{\theta} G$  y  $\pi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow N$  tales que  $\iota$  sea inyectivo,  $\pi$  sea sobreyectivo e  $\text{im } \iota = \ker \pi$ .
- (c) Mostrar que si  $\theta = 1$  es el homomorfismo trivial,  $N \rtimes_{\theta} G \cong N \times G$  es simplemente el producto directo.

**3.5. Producto semi-directo interno.** Sea  $K$  un grupo y sean  $G$  y  $N$  subgrupos de  $K$  con  $N$  normal en  $K$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $K = NG$  y  $N \cap G = \{1\}$ ;
- (b)  $K = GN$  y  $N \cap G = \{1\}$ ;
- (c) Todo elemento de  $K$  puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de  $N$  por uno de  $G$ .
- (d) Todo elemento de  $K$  puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de  $G$  por uno de  $N$ .
- (e) La composición de la inclusión  $\text{incl} : G \hookrightarrow K$  con la proyección canónica  $\text{can} : K \twoheadrightarrow K/N$  es un isomorfismo  $\tau : G \cong K/N$ .
- (f) Existe un homomorfismo  $\sigma : K \rightarrow N$  que se restringe a la identidad de  $N$  y cuyo núcleo es  $N$ .

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  y un isomorfismo de grupos  $\xi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow K$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{\iota} & N \rtimes_{\theta} G & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \tau \\
 N & \xrightarrow{\text{incl}} & K & \xrightarrow{\text{can}} & K/N
 \end{array}$$

Los homomorfismos  $\iota$  y  $\pi$  del diagrama fueron construidos en el ejercicio 3.4.

- 3.6. Mostrar que  $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$  para un homomorfismo  $\theta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$  apropiado.
- 3.7. Mostrar que  $S_n$  es el producto semi-directo de  $A_n$  y  $\langle(12)\rangle$ .
- <sup>†</sup>3.8. Mostrar que  $\mathbb{H}$  no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.
- <sup>†</sup>3.9. Sea  $G$  un grupo finito y  $\phi : G \rightarrow G$  un endomorfismo de  $G$  y  $\alpha$  el endomorfismo de  $G$  construido en el ejercicio 1.12. Mostrar que  $G$  es el producto semi-directo de  $\ker \alpha$  e  $\text{im } \alpha$ .