
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2008

Práctica 1: Grupos – introducción

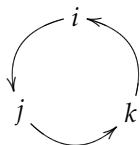
1. Ejemplos

- 1.1. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que $\mathbb{G}_n$, con respecto al producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.
- (b) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1 , con respecto al producto de $\mathbb{C}$, es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

1.2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned}i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \\i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = -1,\end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



1.3. Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathrm{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathrm{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

1.4. *Grupo opuesto*. Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Mostrar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

1.5. Sea G un grupo y X un conjunto.

(a) Sea $G^X = \{f : X \rightarrow G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \rightarrow G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

- (b) Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G . ¿Es normal?

1.6. Producto directo. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \in K \times K \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

1.7. $\mathbb{F}_p$ -espacios vectoriales.

- (a) Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene orden p . Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \rightarrow G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$ -espacio vectorial.
- (b) Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

2. Subgrupos

2.1. Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) H es un subgrupo de G .
- (ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

- c) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G .

- (a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G .
- (b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

2.3. Dado un grupo G , ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G ?

2.4. Sea G un grupo.

- (a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G . Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G .
- (b) Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X . Describirlo en término de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_r\} \rangle$.

2.5. Sea G un grupo, $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$ y sea N un subgrupo de G . Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.

2.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n -ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\text{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n -ésimo grupo de cuaterniones generalizados*.

Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

2.7. (a) Sea $G = \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

(b) Determine $\langle \alpha, \beta \rangle$.

2.8. Generación de S_n .

(a) Mostrar que

(i) $S_n = \langle \{(ij) : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$;

(ii) $S_n = \langle \{(1i) : 1 \leq i \leq n\} \rangle$;

(iii) $S_n = \langle \{(i \ i+1) : 1 \leq i < n\} \rangle$;

(iv) $S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$;

[†](b) Sea $\mathcal{T} = \{(ij) : 1 \leq i < j \leq n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ para que $S_n = \langle T \rangle$.

2.9. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G . Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G .

(b) Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X . Describirlo en término de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X* . En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X , construido en 2.4.

(c) Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X .

2.10. (a) Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(b) Sea $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G . Sea ahora $g = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

2.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subconjuntos arbitrarios.

(a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

(b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

(c) Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

(d) Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

2.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b* . Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b .

(a) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X en G . Mostrar que G' es normal en G . Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.

- (b) G es abeliano sii $[G, G] = 1$.
- (c) Determinar $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n .
- 2.13.** (a) Sea G un grupo y sea $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G . Llamamos a $Z(G)$ el *centro de* G y decimos que los elementos de $Z(G)$ son *centrales* en G .
- (b) Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que es
- $$Z(G) = \{g \in G : gx = gx \text{ para todo } x \in X\}.$$
- (c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, de S_n para cada $n \geq 1$, de $\text{GL}_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.
- (d) Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X .
- 2.14.** Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G . Mostrar que $HZ(G)$ es un subgrupo abeliano de G .