Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 9

Productos Infinitos

1. Probar que
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Probar que para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|<1$ se tiene $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\dfrac{1}{1-z}$.

3. Probar que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$ define una función holomorfa en $B(0,1)$.

4. Probar que el producto
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z-1}{n^2z+1}$$
define una función holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$. Hallar los ceros y calcular sus multiplicidades.

5. Probar que el producto
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$
define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

6. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$
define una función entera.

7. Construcción de funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.

   a) Sean $a,z\in\mathbb{C}$ y $r\in\mathbb{R}$ tales que $0<|a|<1$ y $|z|\le r<1$. Probar que
   $$\left|\frac{a+|a|z}{(1-\overline{a}z)a}\right|\le\frac{1}{1-r}.$$

   b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ una sucesión tal que $0<|a_n|<1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. Probar que
   $$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$$
   define una función holomorfa en $B(0,1)$ y que $|f(z)|\le 1$ para todo $z\in B(0,1)$.

   c) ¿Cuáles son los ceros de la función f definida en el ítem *b*)?

8. Demostrar que existe una función $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B(0,1)$ propiamente.

   Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

9. Sea $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

10. Probar que la función zeta de Riemann, definida en la Práctica 3, admite la representación

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \quad \text{en el abierto } \{\operatorname{Re}(z) > 1\},$$

    donde $(p_k)_k$ es la enumeración usual de los primos positivos.