

ANÁLISIS COMPLEJO

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2024

PRÁCTICA 8

SUCESIONES DE FUNCIONES

Notación Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, notamos $\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$.

- i)* Decimos que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ si $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene $f_n \rightarrow f$ uniformemente en K .
- ii)* Decimos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es *acotado* si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante M_K tal que $\|f\|_K := \max_{z \in K} |f(z)| \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{A}$.

Sucesiones de funciones holomorfas

- Sea $P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!}$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R .
- La *función gamma* se define para cada z con $\operatorname{Re}(z) > 0$ como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

- Probar que Γ está bien definida en $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ y resulta holomorfa allí.
- Probar que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

- Probar que $\Gamma(1) = 1$ y que para todo $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ vale $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y sea $K \subset \Omega$ un compacto no vacío.
 - Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en K y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in K$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ f_n no se anula en K y además $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ uniformemente en K .
 - Si además $g_n \rightarrow g$ uniformemente en K , probar que $f_n g_n \rightarrow f g$ uniformemente en K .
- Sea γ una curva simple cerrada incluida en Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que f no se anula sobre γ . Si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, la cantidad de ceros de f_n en $\operatorname{Int}(\gamma)$ es igual a la cantidad de ceros de f en $\operatorname{Int}(\gamma)$.
- Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ con $f \not\equiv 0$. Si existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe $a_n \in \Omega$ de modo que $a_n \rightarrow a$ y $f_n(a_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$.
- Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ y $(z_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ tal que $z_n \rightarrow z \in \Omega$. Probar que $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$.

7. Probar que $\left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ converge a e^z en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.
8. Probar que si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\{f_n\}$ es un conjunto acotado en $\mathcal{H}(\Omega)$.
9. Probar que si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces $e^{f_n} \rightarrow e^f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$.
10. Sea \mathcal{A} un conjunto acotado en $\mathcal{H}(\Omega)$ y sea $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$. Probar que \mathcal{A}' es acotado.

Sucesiones de funciones meromorfas

11. Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2.$$

Sugerencia: ambos miembros de la igualdad definen funciones meromorfas en \mathbb{C} , periódicas de período 1, con polos de orden 2 en cada entero n y parte singular $\frac{1}{(z-n)^2}$. La diferencia entre ambos miembros sólo tiene singularidades evitables y resulta ser una función acotada.

12. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

13. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi z).$$

Sugerencia: usar el ejercicio 11.

14. Sea f una función meromorfa con polos simples en los puntos $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$, donde asumimos $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Sea A_n el residuo de f en cada polo a_n .

a) Probar que existe una sucesión de reales positivos $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$ y f no tiene singularidades sobre $\{|z| = r_n\}$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\{|z|=r_n\}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \right] = 0$, probar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Sugerencia: calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$.