

# ANÁLISIS COMPLEJO

## SEGUNDO CUATRIMESTRE 2024

### PRÁCTICA 8

#### SUCESIONES DE FUNCIONES

**Notación** Dado un abierto conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , notamos  $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ .

- i)* Decimos que  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  si  $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ ,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  y para todo compacto  $K \subset \Omega$  se tiene  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $K$ .
- ii)* Decimos que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  es *acotado* si para todo compacto  $K \subset \Omega$  existe una constante  $M_K$  tal que  $\|f\|_K := \max_{z \in K} |f(z)| \leq M_K$  para toda  $f \in \mathcal{A}$ .

#### Sucesiones de funciones holomorfas

1. Sea  $P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!}$ . Demostrar que dado  $R > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  vale que  $P_n$  no tiene ceros reales de módulo menor que  $R$ .
2. La *función gamma* se define para cada  $z$  con  $\operatorname{Re}(z) > 0$  como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

- a) Probar que  $\Gamma$  está bien definida en  $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$  y resulta holomorfa allí.
- b) Probar que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

- c) Probar que  $\Gamma(1) = 1$  y que para todo  $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$  vale  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Deducir que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

3. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto y sea  $K \subset \Omega$  un compacto no vacío.
  - a) Si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $K$  y  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in K$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$   $f_n$  no se anula en  $K$  y además  $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$  uniformemente en  $K$ .
  - b) Si además  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en  $K$ , probar que  $f_n g_n \rightarrow f g$  uniformemente en  $K$ .
4. Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada incluida en  $\Omega$  y  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  tal que  $f$  no se anula sobre  $\gamma$ . Si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , la cantidad de ceros de  $f_n$  en  $\operatorname{Int}(\gamma)$  es igual a la cantidad de ceros de  $f$  en  $\operatorname{Int}(\gamma)$ .
5. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  con  $f \not\equiv 0$ . Si existe  $a \in \Omega$  tal que  $f(a) = 0$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  existe  $a_n \in \Omega$  de modo que  $a_n \rightarrow a$  y  $f_n(a_n) = 0$  para todo  $n \geq n_0$ .
6. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  y  $(z_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$  tal que  $z_n \rightarrow z \in \Omega$ . Probar que  $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$ .

7. Probar que  $\left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$  converge a  $e^z$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ .
8. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , entonces  $\{f_n\}$  es un conjunto acotado en  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
9. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , entonces  $e^{f_n} \rightarrow e^f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
10. Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto acotado en  $\mathcal{O}(\Omega)$  y sea  $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$ . Probar que  $\mathcal{A}'$  es acotado.

### Sucesiones de funciones meromorfas

11. Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left( \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2.$$

*Sugerencia:* ambos miembros de la igualdad definen funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$ , periódicas de período 1, con polos de orden 2 en cada entero  $n$  y parte singular  $\frac{1}{(z-n)^2}$ . La diferencia entre ambos miembros sólo tiene singularidades evitables y resulta ser una función acotada.

12. Calcular  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

13. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi z).$$

14. Sea  $f$  una función meromorfa con polos simples en los puntos  $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ , donde asumimos  $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Sea  $A_n$  el residuo de  $f$  en cada polo  $a_n$ .

a) Probar que existe una sucesión de reales positivos  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$  y  $f$  no tiene singularidades sobre  $\{|z| = r_n\}$ .

b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{\{|z|=r_n\}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \right] = 0$ , probar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

*Sugerencia:* calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$ .