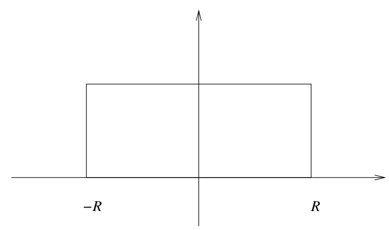
Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 7

Cálculo de Integrales Reales

1. Para $0 < a < 1$ calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$ integrando en el siguiente rectángulo de altura $2\pi i$:



2. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Asumiendo $\lim\limits_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(Q(z), z_k).$$

3. Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx, \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx, \qquad c)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx.$$

4. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Asumiendo $\lim\limits_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, probar que

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{ix}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} Q(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_k).$$

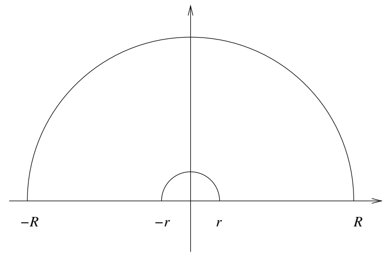
5. Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx.$$

6. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales salvo en el origen, donde se asume que Q tiene un polo simple. El *valor principal* de $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)e^{ix}\,dx$ se define como

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)e^{ix}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0^+}} \left(\int_{-R}^{-r} Q(x)e^{ix}\,dx + \int_{r}^{R} Q(x)e^{ix}\,dx \right)$$

cuando este límite existe. Asumiendo $\lim\limits_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, integrar sobre curvas del tipo



para deducir que vale

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)e^{ix}\, dx = \pi i \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, 0) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_k).$$

7. Probar que

$$\lim_{r\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \pi i$$

y deducir que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

8. Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, probar que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2}\, dx$ converge y calcularla.

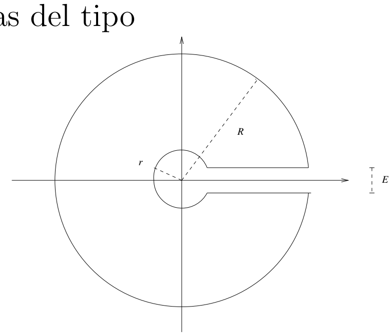
   Sugerencia: integrar sobre curvas como las del ejercicio anterior.

9. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$. Asumiendo $\lim\limits_{z\to\infty} Q(z) = 0$, probar que para todo $\alpha \in (0, 1)$ se tiene

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^{\alpha}}\, dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}\setminus[0.+\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{z^{\alpha}}, z_k\right),$$

   donde la rama elegida de z^{α} es la obtenida tomando argumentos en $(0, 2\pi)$.

   Sugerencia: integrar sobre curvas del tipo



   y tomar límite para $R \to +\infty$, $r \to 0$ y $\varepsilon \to 0$.

10. Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\, dx, \qquad b) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)}\, dx, \qquad c) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}\, dx.$$

11. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \widehat{\mathbb{R}}$ una función racional cuyo denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1. Definiendo $R : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ como

$$R(z) = \frac{1}{z} Q\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right),$$

probar la igualdad

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(R(z), z_k)$$

integrando sobre $\{|z| = 1\}$ con la parametrización $z = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

12. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \operatorname{sen} x}\, dx$ para $a \in \mathbb{R}$ con $|a| > 1$,

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^2}\, dx$ para $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < b < a$,

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1 - 2a\cos x + a^2}\, dx$ para $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$.