ANÁLISIS COMPLEJO

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2024

PRÁCTICA 6

SERIES DE LAURENT

1. Hallar los desarrollos en serie de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en los anillos

   a) $0 < |z| < 1$,
   b) $1 < |z| < 2$,
   c) $2 < |z|$,
   d) $0 < |z-1| < 1$,
   e) $1 < |z-1|$,
   f) $1 < |z-2| < 2$.

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\dfrac{e^z}{z-1}$ en $\{|z| > 1\}$.

3. Mostrar que para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $0 < |z| < \infty$ se tiene
$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$
   donde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos(t)}\cos(nt)\,dt$ para $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en 0. Cuando sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0. Cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

   a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$,
   b) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$,
   c) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}$,
   d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$,
   e) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$,
   f) $f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.
   g) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$,
   h) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?
$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

6. Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Demostrar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $\{1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. Sean f y g holomorfas en un entorno reducido de $z_0 \in \mathbb{C}$.

   a) Probar que z_0 es un cero de orden k de f si y solo si z_0 es un polo de orden k de $1/f$.
   b) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y también un cero (polo) de orden k de g, ¿qué clase de singularidad tiene f/g en z_0?
   c) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, decidir que tipo de singularidad tienen las funciones fg y f/g en z_0.

8. Sea z_0 una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de la función f. Determinar en cada caso qué tipo de singularidad tiene la función e^f en z_0.

9. Decidir qué tipo de singularidad tiene en ∞ la función racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$$

dependiendo de los grados del numerador y el denominador.

10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$ y determinar el orden de cada polo.

    a) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$,
    b) $f(z) = \cos(z) e^{-\frac{1}{z^2}}$,
    c) $f(z) = \frac{1}{z^3 - 5} + z e^{\frac{1}{z}}$,
    d) $f(z) = \frac{z^5}{1+z^4}$,
    e) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$,
    f) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$,
    g) $f(z) = \frac{\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^4 + 2z^2 + 1}$,
    h) $f(z) = \frac{1}{\cos(z) - 1}$.

11. Sea f una función entera. Probar que:

    a) f tiene una singularidad evitable en ∞ si y solo si f es constante,
    b) f tiene un polo de orden n en ∞ si y solo si f es un polinomio de grado n.

12. Hallar todas las funciones enteras y biyectivas.

13. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas en $\mathbb{C}$ siendo:

    a) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$,
    b) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3}$,
    c) $f(z) = z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

14. Sea f holomorfa en un entorno reducido de $a \in \mathbb{C}$ y con un polo en a.

    a) Si a es un polo de orden m y se define $g(z) = (z-a)^m f(z)$, deducir que

    $$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} g^{(m-1)}(z).$$

    b) Concluir que si a es un polo simple entonces

    $$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

15. Sean f meromorfa en un abierto Ω, g holomorfa en Ω y $a \in \Omega$. Probar que:

    a) si a es un polo simple de f, $\operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a) g(a)$;
    b) si a es un cero de orden m de f, a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, a) = m$;
    c) si a es un polo de orden m de f, a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, a) = -m$;
    d) si a es un cero de orden m de f, $\operatorname{Res}(\frac{f'g}{f}, a) = m g(a)$.

    En el item d), ¿es a un polo de $\frac{f'g}{f}$? ¿De qué orden?

16. Calcular los residuos de la siguientes funciones en los puntos indicados:

$a)$ $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)z}$ en 0 y 1, $\qquad$ $b)$ $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{\operatorname{sen}(z)-z}$ en 0, $\qquad$ $c)$ $f(z) = \frac{z^4 e^z}{1+e^z}$ en πi.

17. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo. Calcular

$a)$ $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4+1}\,dz$, $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}\,dz$, $\qquad$ $c)$ $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}$.

18. Sean f entera y R un rectángulo contenido en el semiplano $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Probar que si f no se anula en ∂R y $\displaystyle\int_{\partial R} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$, entonces f no se anula en el interior de R.

19. Sea γ el rectángulo de vértices 0, 1, $1+3i$, $3i$ recorrido en sentido positivo y sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z+3i) = f(z)$ y $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre γ, entonces la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ (contando ambos con multiplicidad).

20. Probar que el polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de las raíces están en $\{1 < |z| < 2\}$.

21. Probar que el polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1$ tiene una única raíz en $\{|z| < \frac{3}{2}\}$ y decidir si tiene alguna raíz en $\{|z| \geq 2\}$.

22. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha - z} = 1$ tiene exactamente n raíces en $\{|z| < 1\}$.

23. Calcular los residuos en ∞ para las funciones

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}.$$

24. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo. Calcular las integrales

$$\int_C \frac{z^2+3z-1}{z^4-2}\,dz \quad \text{y} \quad \int_C \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{1-z^2}\,dz.$$

25. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Se define en Ω la función $f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, tomando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que $\log(r) \in \mathbb{R}$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Calcular $\int_C f(z)\,dz$ siendo C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.

26. Siendo f holomorfa en z_0, probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 sii $f'(z_0) \neq 0$.

27. Sea f holomorfa e inyectiva en la bola $B(a, R)$. Sea $0 < r < R$ y sea γ el borde de la bola $B(a, r)$ orientado positivamente. Probar que para todo $w \in f(B(a, r))$ se tiene

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\,dz.$$

28. Sea f holomorfa y no constante en $\Delta = \{|z| < r\}$ con $f(0) = 0$. Probar que existen un abierto $\Omega \subset \Delta$ con $0 \in \Omega$ y una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tales que $g(\Omega) = \{|z| < s\}$ para algún s y $f(z) = g(z)^{\mathrm{mult(f,0)}}$ para todo $z \in \Omega$.