Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 5

Funciones Analíticas

1. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   a) Probar que f es C^∞ en $\mathbb{R}$ pero no es analítica en ningún entorno de 0.

   b) Definiendo ahora una función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la variable compleja z cambiando x por z en la fórmula que define f, ¿se obtiene una función holomorfa en $z = 0$?

2. Sea f entera y sea R un real no negativo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z con $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

3. Hallar todas las funciones enteras que verifican $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

4. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica no sobreyectiva.

   a) Probar que u está acotada superior o inferiormente.

   b) Probar que u es constante.

   Concluir que toda función armónica es constante o sobreyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sean $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes como vectores respecto de la estructura usual de $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Probar que f es constante si satisface

$$f(z + z_0) = f(z) = (z + z_1) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

6. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no idénticamente nula.

   a) Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

   b) Probar que el conjunto de ceros de f es discreto y concluir que f tiene un número finito de ceros en cada compacto $K \subset \Omega$.

7. ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

8. ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

9. Hallar todas las funciones f enteras que satisfacen, para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad

$$n^2 \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ se tiene
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

11. Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Probar que f es holomorfa en $B(0,1)$ y verificar que sus ceros son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con $n \in \mathbb{N}$ impar. Notar que el conjunto de ceros de f tiene un punto de acumulación sin ser f idénticamente nula en $B(0,1)$. ¿Contradice esto algún resultado conocido?

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas nunca nulas. Probar que si existe una sucesión $(a_n)_n$ en Ω con $\lim_n a_n = a \in \Omega$, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que
$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$
entonces existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

13. Sea f entera con la siguiente propiedad:
$$\text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{(n)}(z) = 0.$$
Probar que f es un polinomio.

14. Sea Ω un conjunto abierto y conexo del plano complejo. Probar que si f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, acotado, no vacío y conexo. Dados puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ fijos, probar que el producto $\left|\overline{PP_1}\right| \cdots \left|\overline{PP_n}\right|$ de las distancias de un punto $P \in \overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \ldots, P_n$ alcanza su máximo en un punto $P \in \partial\Omega$.

16. Sea f una función entera que verifica $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq \left|e^z - \frac{1}{2}\right|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

17. Sean C un cuadrado en $\mathbb{C}$ y f una función continua en C y holomorfa en el interior de C. Probar que si f se anula en uno de los lados de C entonces f es constante.

18. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f|$ es constante sobre $\partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ con $f(z) = 0$.

19. Formular y demostrar el "principio del módulo mínimo" para funciones holomorfas.

20. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen $a, b \in B(0,1)$ distintos entre sí con $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$.

    Sugerencia: considerar la función
$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)} \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$$
    y usar el Lema de Schwarz.

21. Sean $f, g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$ entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

22. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican $f(0) = 3$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

23. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ una función holomorfa que verifica $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0,1)$.

24. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(0,2)$ que verifican $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.