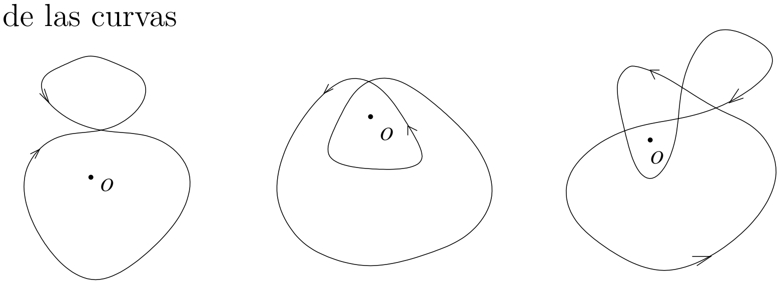
Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 4
Integración

1. Calcular $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$.
2. Calcular $\int_{\partial D^+} |z|^2 z\, dz$ siendo $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) > 0 \ \wedge \ |z| < 1\}$.
3. Dada una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, probar que vale
$$\int_{\gamma_-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$
si se define la curva $\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{C}$ por $\gamma_-(t) = \gamma(a + b - t)$.
4. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = az + b$. Probar que vale
$$\int_{T\circ\gamma} \frac{dz}{z - T(z_0)} = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$
para toda curva γ y todo $z_0 \notin \gamma$.
5. Siendo γ una semicircunferencia que va desde 1 hasta -1, demostrar que
$$\left| \int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \pi\, \frac{1 + e}{2}.$$
6. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.
7. Calcular $\int_\gamma \cos(z)\, dz$ para γ como en el ejercicio 5.
8. Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1 - z_0| \neq r > 0$ y sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.
   a) Calcular $\int_\gamma (z - z_1)^n\, dz$ si n es un entero distinto de -1.
   b) Probar que si $|z_1 - z_0| < r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z - z_1} = 2\pi i$.
   c) Probar que si $|z_1 - z_0| > r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z - z_1} = 0$.
9. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma \subset \Omega$ una curva y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Probar que $\int_\gamma f_n\, dz \longrightarrow \int_\gamma f\, dz$ si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$ que converge uniformemente a f.

10. Siendo γ alguna de las curvas



calcular el valor de $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$ en los tres casos posibles.

11. Calcular los posibles valores de la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ cuando γ es una curva diferenciable, simple y cerrada que no pasa por i ni por $-i$.

12. Para la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ considerar la parametrización $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ definida por $\gamma(t)=a\cos(t)+i\,b\,\mathrm{sen}(t)$ para cada $0\le t\le 2\pi$. Calcular$\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que vale

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}=\frac{2\pi}{ab}\cdot$$

13. Sea γ una curva cerrada y sea $w\in\mathbb{C}$ tal que $w\notin\gamma$. Recordar que el *índice de la curva* γ *con respecto a* w se define como el número

$$\eta(\gamma,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-w}\cdot$$

Probar que son verdaderas siguientes afirmaciones.

i) Si γ_- se define como en el ejercicio 3, resulta $\eta(\gamma,w)=-\eta(\gamma_-,w)$.

ii) Para todo $w\notin\{z:|z|\le\text{máx}\,|\gamma|\}$ se tiene $\eta(\gamma,w)=0$.

iii) La función $\eta(\gamma,w)$ es continua.

iv) Como función de w, el valor de $\eta(\gamma,w)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma$.

v) La función $\eta(\gamma,w)$ toma valores en $\mathbb{Z}$.

14. Dados una curva diferenciable a trozos $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ y una función continua $\varphi:\gamma\times\Omega\to\mathbb{C}$, considerar la función $g:\Omega\to\mathbb{C}$ definida por $g(z)=\int_\gamma\varphi(w,z)\,dw$.

a) Probar que g es continua.

b) Probar que g es holomorfa y verifica $g'(z)=\int_\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}(w,z)\,dw$ si la función $\varphi(w,\cdot\,):\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa para todo $w\in\gamma$ y además $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(w,z)$ resulta continua en w y z.

15. Siendo $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ diferenciable a trozos y $f:\gamma\to\mathbb{C}$ continua, considerar $g:\mathbb{C}\backslash\gamma\to\mathbb{C}$ dada por $g(z)=\int_\gamma\varphi(w,z)\,dw$ donde $\varphi:\gamma\times(\mathbb{C}\backslash\gamma)\to\mathbb{C}$ se define como $\varphi(w,z)=\frac{f(w)}{w-z}\cdot$

a) Probar que g es holomorfa y verifica $g^{(n)}(z)=n!\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw\cdot$

b) Deducir que si γ es cerrada y f es holomorfa, se tiene

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i\,\eta(\gamma,z)}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw\cdot$$

16. Calcular las integrales:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}\,dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z+1}\,dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$ con $k \in \mathbb{Z}$,

   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

   d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}\,dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$,

   e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

17. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$ que converge uniformemente a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sobre compactos de Ω. Probar que si cada f_n es holomorfa en Ω entonces f es holomorfa en Ω y además $({f_n}')_n$ converge uniformemente a f' sobre compactos de Ω.

   Nota: la sucesión $(f_n)_n$ podría no converger uniformemente a f en Ω.

18. Probar que $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2}dt$ define una función holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

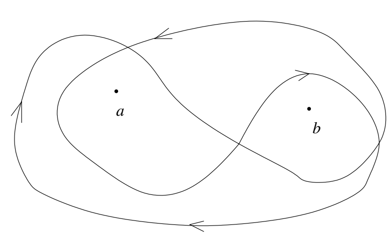
19. Dados $r > 0$ y una función f holomorfa en el disco abierto $\{|z| < r\}$ y continua en el disco cerrado $\{|z| \leq r\}$, probar que vale la igualdad

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

   para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < r$.

Dominios simplemente conexos

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ con $a \neq b$ y sea γ una curva contenida en Ω que se ve así:



   a) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

   b) Convencerse de que γ no es homotópica a cero en Ω.

21. Probar que si Ω es un abierto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?

22. Sean Ω un abierto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa nunca nula.

   a) Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ con $g(z_0) = w_0$ y tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

   Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g} f$ es constante.

   b) Demostrar que tal g es única.

   c) Decidir si en las condiciones del ítem *a*) es verdadera la implicación

   $$f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2)$$

   para $z_1, z_2 \in \Omega$.

   d) ¿Es necesaria la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo en el ítem *a*)?

23. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$.

   Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$ y entonces $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

24. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ para la curva $\gamma(\theta) = 2|\cos(2\theta)|e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.