Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 3

Series

1. Estudiar la convergencia de las series de término general
   a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$,
   b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,
   c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,
   d) $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,
   e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Considerar la serie $\sum_{n\geq 2} a_n$ con $a_n = \dfrac{1}{n^p \log^q(n)}$ y probar que:
   a) converge si $q > 0$ y $p > 1$,
   b) converge si $q > 1$ y $p = 1$,
   c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$,
   d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

3. Hallar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$,
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea $X \subset \mathbb{C}$ un conjunto y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que

$$\sum_n M_n \text{ convergente } \implies \sum_n u_n(x) \text{ uniformemente convergente en } X.$$

5. Dadas sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(z_n)_{n\geq 0}$ en $\mathbb{C}$ tales que $(a_n z_n)_{n\geq 0}$ converge, probar que

$$\sum_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1}) z_n \text{ converge } \iff \sum_{n\geq 1} a_n (z_n - z_{n-1}) \text{ converge.}$$

6. Demostrar los siguientes criterios de convergencia para series complejas.
   a) **Criterio de Dedekind.** La serie $\sum_{n\geq 1} a_n z_n$ converge si las sumas parciales de $\sum_{n\geq 1} z_n$ están acotadas, $\lim_n a_n = 0$ y $\sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente.
   b) **Criterio de du Bois-Reymond.** La serie $\sum_{n\geq 1} a_n z_n$ converge si la serie $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge y la serie $\sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente.
   c) **Criterio de Dirichlet.** La serie $\sum_{n\geq 1} r_n z_n$ converge si las sumas parciales de $\sum_{n\geq 1} z_n$ están acotadas y $(r_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente tal que $\lim_n r_n = 0$.
   d) **Criterio de Abel.** La serie $\sum_{n\geq 1} r_n z_n$ converge si $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge y $(r_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos.

7. Calcular los radios de convergencia de las siguientes series de potencias y para cada una de ellas estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,
   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,
   h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,
   i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,
   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n) z^n$,
   k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

8. Hallar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales resultan convergentes las series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$,
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,
   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,
   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,
   i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}\right)^n$, $|\alpha| < 1$.

9. Probar que si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ tienen radios de convergencia ρ_a y ρ_b, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ tiene radio de convergencia $\rho \geq \min\{\rho_a, \rho_b\} =: \rho_0$ y para $z \in B_{\rho_0}(0)$ vale

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} b_n z^n.$$

10. Probar que la región de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_{m+n} z^n$ no depende de la elección de $m \in \mathbb{N}_0$.

11. Probar que los radios de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} a_n n^k z^n$ coinciden para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Asumiendo que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$, sea $f : B_\rho(0) \to \mathbb{C}$ la función definida por la suma de dicha serie.

    a) Probar que f es de clase C^∞ y que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo $z \in B_\rho(0)$ vale

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} a_n n(n-1)\cdots(n-(k-1)) z^{n-k}.$$

    b) ¿Qué radios de convergencia tienen las series del ítem anterior?

    c) Probar que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

13. Probar que dos series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ con radios de convergencia no nulos representan una misma función en un entorno del origen si y sólo si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

14. Siendo f como en el ejercicio 12, probar que:

    i) f es par sii $a_n = 0$ para todo n impar,

    ii) f es impar sii $a_n = 0$ para todo n par.

    Recordar que, si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio simétrico respecto de 0, una función $f : D \to \mathbb{C}$ se dice *par* cuando $f(-z) = f(z)$ para todo $z \in D$ e *impar* cuando $f(-z) = -f(z)$ para todo $z \in D$.

15. Hallar los términos de orden menor o igual que 3 en los desarrollos de Maclaurin de las funciones

   a) $e^z \operatorname{sen}(z)$,
   b) $\operatorname{sen}(z)\cos(z)$,
   c) $\frac{e^z - 1}{z}$,
   d) $\frac{e^z - \cos(z)}{z}$,
   e) $\frac{1}{\cos(z)}$,
   f) $\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$.

16. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hallar el desarrollo de Maclaurin de la funcion $f_n(z) = \dfrac{1}{(1+z)^n}$.

17. La *sucesión de Fibonacci* se define por la recursión $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tomando $F_0 = F_1 = 1$.
   a) Probar que $R(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ converge en un entorno del origen y que $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.
   b) Descomponer $R(z)$ en fracciones simples para obtener un nuevo desarrollo en serie de $R(z)$.
   c) Obtener una fórmula cerrada para F_n igualando los desarrollos de los ítems *a*) y *b*).

18. Considerar la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por la suma de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
   a) Mostrar que h es entera y calcular su derivada.
   b) Mostrar que $h(z+w) = h(z)h(w)$.
   c) Probar que $h(z) = e^z$.
   d) Deducir desarrollos en serie de potencias para $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$.

19. Sean Log la rama principal del logaritmo, $f(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ y $g(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.
   a) Calcular los dominios de f y g.
   b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ donde están definidas.
   c) Deducir que $f = g$ en el interior de $\operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$.

20. El *producto de Cauchy* de dos series de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ se define como la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se toma

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

   Suponiendo que las series iniciales tienen radios de convergencia ρ_a y ρ_b, concluir que la serie producto converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq r$ para todo $r < \min\{\rho_a, \rho_b\}$. Deducir que si ρ es el radio de convergencia del producto de Cauchy, entonces $\rho \geq \min\{\rho_a, \rho_b\}$.

21. Para cada $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$ definimos la *función Zeta de Riemann* como

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

   donde $n^s = \operatorname{Exp}(s \cdot \operatorname{Log}(n))$ se calcula usando la rama principal del logaritmo.
   a) Probar que la serie que define $\zeta(s)$ converge en el semiplano $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$ y que además lo hace uniformemente en cada semiplano $\{\operatorname{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.
   b) Deducir que $\zeta(s)$ es continua en el semiplano $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$.

22. La serie del ejercicio anterior es un ejemplo de *serie de Dirichlet*, que en general tienen la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (*)$$

donde $(a_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{C}$.

a) Probar que si la serie $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ no converge para todo s ni diverge para todo s, entonces existe un número real σ_a tal que la serie $(*)$ converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ pero no converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$. El semiplano $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma_a\}$ se denomina *semiplano de convergencia absoluta* de la serie de Dirichlet $(*)$.

b) Probar que la serie $(*)$ converge uniformenente en cada semiplano $\{\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_a + \varepsilon\}$.

c) Deducir que $(*)$ define una función continua en $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma_a\}$.

23. Considerar la serie de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

a) ¿Cuál es su semiplano de convergencia absoluta?

b) Probar que la serie $L(s)$ converge en $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$. *Sugerencia*: recordar el ejercicio 6.

c) Probar que para $\mathrm{Re}(s) > 1$ se tiene

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}}\, L(s).$$

Comentario: esta fórmula puede utilizarse para extender la definición de $\zeta(s)$ a la región

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\,,\ s \neq 1\}\,.$$