Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 2

Funciones Holomorfas. Transformaciones Conformes.

Funciones holomorfas

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \iff \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L) \ \wedge \ \lim_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L).$$

2. Considerar funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{y} \quad g(x,y) = (u(x,y), v(x,y)),$$

asumiendo $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y f derivable en $z_0 = a + ib$.

   a) Probar que g es diferenciable en (a, b).

   b) Calcular, restringiendo h a $\mathbb{R}$, los límites

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$$

   en términos de u y v. ¿Qué se deduce?

   c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0, \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Verificar que f no es derivable en 0 como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ aunque sí es continua y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$ y hallar $f'(z)$:

   a) $f(z) = y + ix$,

   b) $f(z) = \overline{z}$

   c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,

   d) $f(z) = x^2 + iy^2$,

   e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,

   f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$,

   g) $f(z) = z^3 - 2z$,

   h) $f(z) = z^2\,\overline{z}$,

   i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,

   j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 se dice *armónica* si verifica $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Por otra parte, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ resulta holomorfa.

   a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son armónicas si son de clase C^2. Deducir que si u es una función de clase C^2 que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

   b) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

   c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

   i) $u_1(x,y) = x^2 - y^2$, *ii*) $u_2(x,y) = x^2y^2$, *iii*) $u_3(x,y) = 2x(1-y)$.

   d) Probar que las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal cuando v es conjugada armónica de u.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una *región*, i.e. un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto, conexo y no vacío.

   a) Probar que todo par de puntos en Ω puede conectarse con una curva C^1 a trozos.

   b) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, deducir que f es constante.

7. Asumiendo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, probar las siguientes implicaciones:

   a) $\mathrm{Re}(f)$ cte $\implies f$ cte, *c*) $|f|$ cte $\implies f$ cte, *e*) $\overline{f}$ holomorfa $\implies f$ cte.
   b) $\mathrm{Im}(f)$ cte $\implies f$ cte, *d*) $\arg(f)$ cte $\implies f$ cte,

8. Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que verifica $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$, donde $L_1, \ldots, L_n$ son n rectas distintas en el plano $\mathbb{C}$. Probar que g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ resulta holomorfa.

10. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifican $f'(0) = 1$ y $f(x+iy) = e^x f(iy)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

    Sugerencia: definir $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vía $f(iy) = c(y) + is(y)$ y probar que $c' = -s$ y $s' = c$.

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifican

$$f(x+iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi$$

    para cualquier elección de $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Sean f, g funciones holomorfas en z_0 que verifican $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces se verifica la igualdad

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

    Notar que este resultado es una versión de la *Regla de L'Hôpital* para funciones holomorfas.

13. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,

b) $\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$,

c) $\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,

d) $\lim_{z\to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

Función logaritmo y raíces n-ésimas

14. Notando $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ decimos que una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es una *rama del logaritmo* en Ω si g es continua y verifica $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

    b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1 \equiv g_2$ en Ω.

    c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω entonces $S^1 \not\subset \Omega$.

15. Dada una rama del logaritmo $g : \Omega \to \mathbb{C}$, para $b \in \mathbb{C}$ y $a \in \Omega$ se define $a^b = e^{b\cdot g(a)}$.

    a) Verificar que a^b coincide con su valor usual cuando $b \in \mathbb{Z}$.

    b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones de ramas del logaritmo.

    c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C},\ h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h_2(z) = a^z$ resultan holomorfas.

    d) Sean $z \in \Omega$ y $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

16. Sea Log la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\frac{i-t}{i+t}\right).$$

17. Dados $n \in \mathbb{N}$ y un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, llamamos *rama de la raíz n-ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, denotaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    a) Probar que hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Escribirlas explícitamente.

    b) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

    c) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

18. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, sea g una rama del logaritmo en Ω y sea $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$ la rama de raíz cúbica en Ω inducida por g.

    a) Demostrar que $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω y para toda rama g.

    b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

    c) Probar que en *b*) aumenta la cantidad de ramas si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Transformaciones conformes

19. Dada una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^1, sea $v = \gamma'(t_0) \neq 0$ el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0)) \neq 0$. Mostrar que zv es el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

20. Considerar curvas $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dadas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1+i)t$. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define como $f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$, ¿en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ a $t = 0$?

21. Demostrar que si f es holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$ es tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es una aplicación conforme en z_0.

22. Determinar dónde son conformes las siguientes transformaciones:

    a) $f(z) = z^3 - 3z + 1$,

    b) $f(z) = \tan(z)$,

    c) $f(z) = z - e^z + 1 - i$,

    d) $f(z) = ze^{z^2} - 2$,

    e) $f(z) = z - \operatorname{Log}(z + i)$,

    f) $f(z) = z^2 + 2iz - 3$.

23. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformación conforme en cada punto del plano complejo.

    a) ¿En qué puntos de $\mathbb{C}$ es conforme la transformación $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$?

    b) ¿En qué puntos de $\mathbb{C}$ es conforme la transformación $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $h(z) = e^{f(z)}$?