Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica Extra
Razón Doble y Simetrías

1. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ con z_2, z_3, z_4 distintos entre sí, la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 por la única homografía T que verifica $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

   a) Probar que para $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ se tiene la expresión explícita
   $$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$
   Hallar expresiones explícitas para los casos $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$ y $z_4 = \infty$.

   b) Probar que vale $\big(F(z_1), F(z_2), F(z_3), F(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ para toda homografía F.

   c) Asumiendo que $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ son cuatro puntos distintos, probar que están sobre una misma recta o circunferencia si y sólo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

2. Dos puntos $z, z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$ son *simétricos* respecto de un recta o circunferencia C si verifican
   $$\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$$
   cada vez que z_2, z_3, z_4 son tres puntos distintos de C.

   a) Probar que esta definición depende sólo de C y no de los puntos z_2, z_3, z_4 elegidos.

   b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es simétrico de un único punto z^* respecto de C y que se tiene $z = z^*$ si y sólo si $z \in C$.

   c) Se llama *simetría respecto de C* a la aplicación que asigna a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ su simétrico respecto de C. Probar que la simetría respecto de C puede escribirse como
   $$T^{-1} \circ \overline{T} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$
   siendo T cualquier homografía que aplique C en $\widehat{\mathbb{R}}$.

   d) Probar que si z y z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C, entonces $F(z)$ y $F(z^*)$ son simétricos respecto de $F(C)$ para toda homografía F.

3. Probar que la simetría respecto de la recta real coincide con la conjugación.

4. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia respecto de ella misma es ∞.

5. Probar que la noción de simetría definida anteriormente coincide con:

   a) la simetría usual respecto de una recta cuando C es una recta,

   b) la inversión respecto de una circunferencia cuando C es una circunferencia.

6. Dados tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace simétricos a z_2 y z_3.