Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 10

Automorfismos y Teorema de Riemann

1. Automorfismos de la bola unidad.

   a) Sea f un automorfismo de $B(0,1)$ tal que $f(0)=0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z)=e^{i\theta}z$ para todo z en $B(0,1)$.

   b) Probar que $f: B(0,1) \to B(0,1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0,1)$ tales que para todo z en $B(0,1)$ vale

   $$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}.$$

   Sugerencia: recordar el ejercicio 44 de la Práctica 1.

2. Automorfismos del semiplano superior.

   a) Sea $\mathrm{P} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior, también llamado *semiplano de Poincaré*. Probar que $f: \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo z en P vale

   $$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

   b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

   Sugerencia: recordar el ejercicio 46 de la Práctica 1.

3. Caracterizar todos los automorfismos de $L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq a < b \leq \pi$ y $b - a$ múltiplo racional de π. Dar explícitamente un biholomorfismo ϕ que mande el conjunto $\{z \in \mathbb{C}^* : a < Arg(z) < b\}$ en el disco unidad.

5. Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

   Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la Práctica 6.

6. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, f y g dos automorfismos de Ω y a y b dos puntos distintos de Ω. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, probar que $f(z) = g(z)$ para todo z en Ω.

7. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.