Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 1

Números Complejos. Esfera de Riemann. Homografías.

Números complejos

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$:
   a) $(i+1)(i-1)(i+3)$,
   b) $\dfrac{2+i}{2-i}$,
   c) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$,
   d) $\dfrac{1+i}{i}$,
   e) $(1+i)^{100}$,
   f) $\dfrac{1}{-1+3i}$.

2. Expresar las partes reales e imaginarias de los siguientes complejos en términos de las de z:
   a) z^2,
   b) z^{-1},
   c) z^{-2},
   d) z^4,
   e) $\dfrac{1+z}{1-z}$,
   f) $\dfrac{i-z}{1+iz}$,
   g) $\dfrac{z}{z+1}$.

3. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:
   a) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,
   b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
   d) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$,
   e) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

4. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_nX^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0$. Concluir que si $P \in \mathbb{R}[X]$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de P entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también es raíz de P.

5. Para $z \in \mathbb{C}$ se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Notar que $|z|$ es un número real no negativo bien definido y que $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ si $z = x + iy$. Para $z, w \in \mathbb{C}$ probar que:
   a) $|zw| = |z|\,|w|$,
   b) si $w \neq 0$ entonces $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ y $w^{-1} = \dfrac{\overline{w}}{|w|^2}$,
   c) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$,
   d) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$ y $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$,
   e) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   f) $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad e), conocida como “ley del paralelogramo”.

6. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   a) $|z - i + 3| = 5$,

   b) $|z - i + 3| \leq 5$,

   c) $\mathrm{Re}(2z + 3) \geq 0$,

   d) $\mathrm{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

7. Considerar la ecuación $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$. Probar que si su conjunto solución no es todo $\mathbb{C}$ ni vacío, entonces debe ser un punto, una recta o una circunferencia. Mostrar que todo punto, recta o circunferencia puede representarse de esta forma.

8. Probar que la función $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica y que ésta hace de $\mathbb{C}$ un espacio métrico completo y separable.

9. Notando $z = x + iy$ y $w = u + iv$, definimos funciones $d_1, d_\infty : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ por

$$d_1(z, w) = |x - u| + |y - v| \quad \text{ y } \quad d_\infty(z, w) = \text{máx}\{|x - u|, |y - v|\}.$$

   Demostrar que $(\mathbb{C}, d_1)$ y $(\mathbb{C}, d_\infty)$ son espacios métricos.

10. Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ fijos, describir geométricamente los conjuntos

    a) $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d(z, w) < r\}$,

    b) $B_1(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d_1(z, w) < r\}$,

    c) $B_\infty(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : d_\infty(z, w) < r\}$.

Sucesiones de números complejos

11. Considerar en $\mathbb{C}$ la topología usual.

    a) Probar que $\text{lím}_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ si y sólo si

$$\text{lím}_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \;\text{ y }\; \text{lím}_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z).$$

    b) Probar que si $\text{lím}_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\text{lím}_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

    c) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

12. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$.

    a) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ y probar que vale $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\right) = \frac{1}{1 - \alpha}$.

    b) ¿Qué puede decirse sobre estos límites para el caso $|\alpha| \geq 1$?

13. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

    a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

    b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

    c) $\cos(n\pi) + i\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}{n^2}$,

    d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$,

    e) ni^{2n+1}.

Representación matricial de los números complejos

14. Probar que toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede escribirse de forma única como

$$T(z) = \mu z + \lambda \overline{z}$$

donde $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$. Determinar estos números en función de T y probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\lambda = 0$. Notar que, en tal caso, T resulta ser la multiplicación por $T(1)$.

15. Fijar una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y considerar la transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inducida por A. Probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y sólo si $a_{11} = a_{22}$ y $a_{21} = -a_{12}$. Notar que, en tal caso, T representa la multiplicación por $z_A = a_{11} + ia_{21}$.

16. Deducir que la asignación $A \mapsto z_A$ del ejercicio anterior define una biyección entre

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y $\mathbb{C}$ de modo que $z_{A+B} = z_A + z_B$, $z_{AB} = z_A z_B$ y $z_{Id} = 1$. Luego, con la suma y la multiplicación usual de matrices, $\mathcal{M}$ resulta ser un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Forma polar y raíces n-ésimas

17. Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

   a) $1 + i$, *b*) $-5i$, *c*) -3.

18. Escribir los siguientes números complejos en la forma $a + ib$:

   a) $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, *b*) $e^{-i\pi}$, *c*) $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

19. Mostrar que si $\alpha = re^{i\theta}$ es la forma polar del complejo $\alpha \neq 0$, entonces la transformación lineal T_α del ejercicio 15 se factoriza como una rotación de ángulo θ seguida de una homotecia de factor r. Deducir que T_α preserva los ángulos entre los vectores.

20. Hallar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preservan los ángulos entre los vectores. ¿Son todas de la forma T_α para algún $\alpha \in \mathbb{C}$?

21. Para $n = 2, 3, 4, 5$ dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

22. Calcular las siguientes raíces:

   a) $(-1 + i)^{1/3}$, *c*) $i^{2/3}$, *e*) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$,
   b) $(\sqrt{3} + 3i)^{1/2}$, *d*) $64^{1/6}$, *f*) $(-4 + 4i)^{1/5}$.

23. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

24. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3 - i)z - (1 + 2i) = 0$.

25. Probar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

26. Sea $z = e^{2\pi i/n}$ para un entero $n \geq 2$. Demostrar que $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.

27. Probar que vale $1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ para $z \neq 1$ y, asumiendo $0 < \theta < 2\pi$, deducir una fórmula para $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.

Funciones exponencial, seno y coseno

28. Para $z = a + ib \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se define $e^z = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$.
    a) Demostrar que para $z, w \in \mathbb{C}$ cualesquiera vale $e^{w+z} = e^w e^z$.
    b) Describir los z tales que $e^z = 1$.
    c) Demostrar que si $e^z = e^w$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.
    d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

29. Generalizando las igualdades del ejercicio 25, se definen

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z).$$

30. Mostrar que $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ tienen período 2π.

31. Mostrar que los únicos ceros de $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ son los ceros reales usuales.

32. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.

33. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos(z) \in \mathbb{R}$ y hacer lo mismo para $\operatorname{sen}(z)$.

34. Probar que $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

35. Probar que para $a, b, b' \in \mathbb{R}$ con $|b| < |b'|$ se tiene

$$|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)| \quad \text{y} \quad |\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|.$$

36. Para $z \in \mathbb{C}$ se definen el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* como

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Notar que $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$ son, respectivamente, las partes par e impar de e^z.
    a) Sin hacer ninguna cuenta, escribir las series de Maclaurin de $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$.
    b) Deducir las igualdades $\cosh(iz) = \cos(z)$ y $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen}(z)$ para $z \in \mathbb{C}$.
    c) Verificar la identidad $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$.
    d) ¿Son $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$ funciones periódicas? ¿Son suryectivas?

El plano complejo ampliado y la esfera de Riemann

37. Sea $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y sea S la esfera en $\mathbb{R}^3$ de centro $(0,0,0)$ y radio 1. Siendo $N = (0,0,1) \in S$, se define la *proyección estereográfica* $\psi : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ como sigue: $\psi(N) = \infty$ y para $P \in S \backslash \{N\}$ se define $\psi(P) = a + ib$ si y solo si $(a,b,0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$. En este contexto, $\widehat{\mathbb{C}}$ es el *plano complejo ampliado* y S es la *esfera de Riemann.*

    a) Probar que $\psi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ para $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

    b) Probar que ψ es una biyección y su inversa φ está dada por

    $$\varphi(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} \left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1\right).$$

    c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

38. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía ψ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos

    $$\overline{d}(z, z') = \|\psi^{-1}(z) - \psi^{-1}(z')\| = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|,$$

    donde $\|\cdot\|$ representa la norma usual de un vector en $\mathbb{R}^3$.

    a) Probar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ y que ésta resulta equivalente a la usual cuando se la restringe a $\mathbb{C}$ (probando, por ejemplo, que tienen las mismas sucesiones convergentes).

    b) Para $z, w \in \mathbb{C}$ verificar que $\overline{d}(z, w) = \dfrac{2|w - z|}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \dfrac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

    c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto.

39. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección $\psi(C)$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Recordar que una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ad - bc \neq 0$.

40. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

41. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T que verifica $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

42. Hallar homografías que transformen

    a) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

    b) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

43. Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ejercicio anterior es la recta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}$.

44. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z-\alpha}{-\overline{\alpha}z+1}$$

manda α en 0 y transforma la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en sí misma.

45. A cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $\det(A) = ab - cd \neq 0$ le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

y decimos que la matriz A *representa* la homografía T_A.

a) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

b) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

Si A y B respresentan las homografías T_A y T_B respectivamente:

c) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

d) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

46. Demostrar que una homografía $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y sólo si puede escribirse en la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

47. En el plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se definen tres clases de transformaciones elementales: la *inversión* $\mathrm{R}(z) = z^{-1}$, las *traslaciones* $\mathrm{T}_{z_0}(z) = z + z_0$ y las *homotecias* $\mathrm{H}_\lambda(z) = \lambda z$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ son parámetros arbitrarios.

a) Caracterizar las imágenes de circunferencias y rectas por dichas transformaciones.

b) Probar que toda homografía puede escribirse como una composición de a lo sumo cuatro transformaciones elementales.

c) Describir las imágenes de circunferencias y rectas por homografías arbitrarias.

48. Determinar las imágenes de las siguientes regiones por las homografías indicadas:

a) el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$,

b) el medio disco $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\,,\ |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$,

c) el cuadrante $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\,,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ por $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

49. Hallar homografías que transformen

a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

b) el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ en $|z| < 1$ y un $\alpha \in H$ arbitrario en 0.

50. Un *punto fijo* de una homografía T es un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $T(z) = z$.

a) Probar que ∞ es punto fijo de T si y sólo si $T(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq 0$.

b) Probar que S y T tienen la misma cantidad de puntos fijos si son *conjugadas*, es decir, si existe $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $S = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$.

c) Concluir que toda homografía $T \neq \mathrm{Id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ tiene exactamente 1 o 2 puntos fijos.