Análisis Complejo

2do cuat 2024

$\mathbb{C}$

$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$z = re^{i\theta} \qquad r = |z| \quad \theta = \arg(z)$

<u>Teo</u>: no hay ninguna definición posible del argumento que sea continua.

$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b))$

<u>Def</u>: U abierto y conexo en $\mathbb{C}$

$0 \notin U$.

Una función $g : U \to \mathbb{C}$

$\exists g$

$$z = |z| e^{i g(z)} \qquad \forall z \in U$$

g se llama una <u>rama del argumento</u>

(rama (o determinación) principal $\theta \in (-\pi, \pi)$)

<u>logaritmo</u>

$$z = e^{w}$$

para cada $z \neq 0$ hay infinitas soluciones w.

<u>Def</u>: U abierto y conexo en $\mathbb{C}$

$f : U \to \mathbb{C}$ es una <u>rama del logaritmo</u> si

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in U$$

Prop: Dos ramas del logaritmo en U difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$

$$f_1(z) = f_2(z) + 2k\pi i$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Funciones holomorfas

f es holomorfa en $z_0 \in U$ si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

Prop:
$f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa en U

$\to$ f continua en U.

Prop: f, g holomorfas

1) $f+g$ holomorfa

2) $f \cdot g$ holomorfa

3) $g \neq 0$ $\quad f/g$ holomorfa

4) h holomorfa

$\to h \circ f$ holomorfa

Ejemplos:

$p(z)$ polinomio

$\frac{1}{z}$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Teo:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

convergente en $D_r(z_0)$

$\to f$ holomorfa en $D_r(z_0)$

y
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Teo: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

convergente en $D_r(z_0)$

$$\to a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

[Cauchy-Riemann

$f : U \to \mathbb{C}$
holomorfa

$\Updownarrow$

$f : \underset{\subset \mathbb{R}^2}{U} \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable

y $\quad Df = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$f = u + iv \qquad u, v : U \to \mathbb{R}$

$$\to \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \text{(ec. Cauchy Riemann)}$$

[Obs: $u, v \in C^2$

$\to \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

—— ∘ ——

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$\to$ Cauchy-Riemann se escribe

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

y $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$

Teo: $f' \equiv 0 \quad \forall z \in U$ ab. conexo

$\rightarrow f$ es cte en U.

Teo. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa

U ab. conexo

i) Si $Re(f)$ o $Im(f)$ es cte

$\rightarrow f$ es cte.

ii) $|f|$ es cte $\rightarrow f$ es cte.

[Integración

$\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$
$\subseteq \mathbb{R}$

$\alpha(t) = u(t) + i v(t)$

Def $\int_a^b \alpha(s)\,ds = \int_a^b u(s)\,ds + i \int_a^b v(s)\,ds$

—o—

$\alpha: [a,b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ suave a trozos

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$

Def $\int_\alpha f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt$

Def: longitud de α

$$\text{long}(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$$

Prop:

1) $\int_\gamma (af+g)(z)\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$

2) Si $\tilde{\gamma}$ es γ invirtiendo la orientación

$\rightarrow$ $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$

3) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$

Prop: $f_n : U \to \mathbb{C}$

$f_n \rightrightarrows f$ uniformemente sobre compactos de U

γ suave a trozos

$\rightarrow$ $\int_\gamma f_n(z)\,dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz$

Primitivas.

Def: $f: U \to \mathbb{C}$ cont.

$F: U \to \mathbb{C}$ es primitiva de f en U si

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U$$

Obs:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Prop: U abierto conexo

$f: U \to \mathbb{C}$ continua

Son equivalentes

1) f tiene primitiva en U

2) $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\forall\ \gamma_1\ \gamma_2$ con los mismos extremos

3) $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$\forall\ \gamma$ cerrada

Prop: $f: D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ cont.

Son equivalentes

1) f tiene primitiva en $D_r(z_0)$

2) $$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

$\forall R$ rectangulo $\subseteq D_r(z_0)$ con lados paralelos a los ejes.

Teo (Cauchy)

U abierto en $\mathbb{C}$

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa y C^1

$$\rightarrow \int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

$\forall R$ rectangulo $R \subset U$

Teo: (Cauchy - Goursat)

U ab en $\mathbb{C}$

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa

$$\Rightarrow \int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

$\forall R$ rectangulo $R \subset U$

Teo: U ab en $\mathbb{C}$

$f : U \to \mathbb{C}$ continua

y holomorfa en $U \setminus \{a\}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0 \quad \forall R$ rectángulo $R \subset U$

<u>Obs</u>: el teo anterior vale si los ptos excepcionales están sobre una recta paralela a alguno de los ejes.

<u>Teo</u>: $f : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $D_r(z_0)$ (salvo tal vez en un pto)

$\to f$ tiene primitiva en $D_r(z_0)$

<u>Teo</u>: toda función holomorfa $f : \underset{ab}{U} \to \mathbb{C}$ tiene localmente una primitiva

<u>Lema</u>: $a \in D_r(z_0)$

$\gamma = \partial D_r(z_0)$ recorrido

en sentido antihorario

$\to \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i$

$\boxed{\text{Teo (Fórmula de Cauchy)}}$

$f: \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$

cont en $\overline{D_r(z_0)}$

holomorfa en $D_r(z_0)$

$a \in D_r(z_0)$

$\to$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-a} = f(a)}$$

Obs: $f\big|_{\partial D_r(z_0)}$ determina

f dentro de $D_r(z_0)$

Teo: f holomorfa en $D_r(z_0)$

$\to$ f tiene un desarrollo

en serie de potencias en

$D_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D_r(z_0)$$

Def. f analítica en U ab si $\forall z_0 \in U$ $\exists D_r(z_0)$ tq f tiene desarrollo en serie en $D_r(z_0)$

Teo: f holomorfa $\Leftrightarrow$ f analítica $\qquad \dfrac{f: U \to \mathbb{C}}{\text{ab}}$

Teo: $f: \underset{\text{ab}}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$w \in U$ $\quad r > 0$ tq $\overline{D_r(w)} \subset U$

$\rightarrow$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz$$

Teo (Morera)

$f: \underset{\text{ab}}{U} \to \mathbb{C}$

Si f tiene localmente una primitiva $\rightarrow$ f es holomorfa en U.

Teo (desigualdades de Cauchy)

$f: D_{r_0}(a) \to \mathbb{C}$ holomorfa

$r < r_0$

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \cdot r^{-n} \cdot \max_{|z-a|=r} |f(z)|$$

Teorema de Liouville

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa
(f entera)

f acotada $\Rightarrow$ f es constante.

Corolario: (Teo fundamental del algebra)

todo polinomio $p(z)$ tiene una raiz $p(z_0) = 0$.

Valor medio $\quad f: \overset{\circ}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \qquad \overline{D_r(z_0)} \subset U$$

[Teo (módulo maximo)

U ab conexo en $\mathbb{C}$

$f: U \to \mathbb{C}$ cont que satisface la prop de la media

$\to$ si $|f|$ alcanza un maximo absoluto en $z_0 \in U$

$\to$ f es constante en U.

Corol: f como antes

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$

Teo: (lema de Schwartz)

f holomorfa en $D_1(0)$ tq

1) $f(0) = 0$

2) $|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D_1(0)$

$\to$

1) $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$

2) Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D_1(0)$

ó

$|f'(0)| = 1$

$\to \quad f(z) = \lambda z$ para algún λ con $|\lambda| = 1$

$\boxed{\text{Teorema de las tres líneas}}$

$\Omega = \{ z \,/\, a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b \}$

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ continua

holomorfa en Ω°.

Dado $x \in [a,b]$ sea

$$M(x) = \sup\{ |f(z)| \,/\, \operatorname{Re}(z) = x \}$$

$\to$

$$M(x) \leq (M(a))^{\frac{b-x}{b-a}} \cdot (M(b))^{\frac{x-a}{b-a}}$$

Ceros de una función holomorfa

Teo $f: \underset{\substack{ab \\ \text{Conexo}}}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

Si $f|_{I} \equiv 0$ $\underset{ab}{I} \subset U$

$\to f \equiv 0$ en todo U.

Teo: $f: \underset{\substack{ab \\ \text{Conexo}}}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

Si los ceros de f en U tienen un pto de acumulación en U

$\to f \equiv 0$ en U.

Primitivas a lo largo de curvas

Def: $f: \underset{ab}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$\alpha: [a,b] \to U$ curva.

Una función $\tilde{\alpha}: [a,b] \to U$ es una primitiva de f a lo largo de α si

$\forall t \in [a,b]$ existe D entorno de $\alpha(t)$ y F una primitiva de f

en D tales que

$$\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$$

<u>Prop:</u> Siempre hay una primitiva de f a lo largo de una curva y es única salvo sumar una constante.

<u>Prop</u> $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\tilde{\alpha}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ primitiva de f a lo largo de α

$\longrightarrow$

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \tilde{\alpha}(b) - \tilde{\alpha}(a)$$

<u>Homotopías</u>

<u>Def:</u> Dados $\alpha_1: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\alpha_2: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

con <u>los mismos extremos</u>

se dice que α_1 y α_2 son homotópicas si $\exists$ Γ continua

$\Gamma: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$\Gamma(t,0) = \alpha_1(t)$

$\Gamma(t,1) = \alpha_2(t)$

$\Gamma(0,s) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) \quad \forall s$
$\Gamma(1,s) = \alpha_1(1) = \alpha_2(1) \quad \forall s$

Def:
$f: \underset{\text{ab}}{U} \text{ en } \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa

Γ homotopía
$\Gamma: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow U$

$\tilde{\Gamma}: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow U$
es una primitiva de f
a lo largo de Γ
si $\forall \ (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$
$\exists$ D entorno de $\Gamma(s,t)$
y F primitiva de f en D
tal que

$$\tilde{\Gamma}(s,t) = F(\Gamma(s,t))$$

Prop: la primitiva anterior siempre existe y es única salvo sumar una constante.

Teo: $f: \underset{\text{ab}}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa
$\gamma_1 \ \gamma_2$ curvas homotópicas con los mismos extremos
$\longrightarrow$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

Teo: (Cauchy - Goursat homotópico).

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa
ab

γ curva cerrada homotópica a un pto en U

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$

Def: simplemente conexo

$D \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si es conexo y toda curva cerrada en D es homotópica a un punto en D.

Teo: U ab simplemente conexo en $\mathbb{C}$

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa tiene una primitiva global en U.

Indice de una curva

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz$$

lema: $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$

Prop:

1) $n(\gamma, a)$ se mantiene cte al deformar γ continuamente sin pasar por a.

2) $n(\gamma, a)$ es cte en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$

$n(\gamma, a) = 0$ en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

3) $n(\partial D, a) = 0 \quad a \notin D$

$n(\partial D, a) = 1 \quad a \in D$

$\gamma = \partial D$ recorrido una vez en sentido antihorario. –

Teo (Formula de Cauchy)

$f: \underset{ab}{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa

γ curva cerrada que no pasa por a y es homotópica a un pto en U

Entonces

$$f(a) \cdot n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

Def: U ab en $\mathbb{C}$

γ curva en U

γ es homóloga a 0
dentro de U si
para todo $z \in \mathbb{C} \setminus U$
$\underline{n(\gamma, z) = 0}$

Teo (Cauchy - Goursat
Homológico)
$f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa
ab
γ curva cerrada
homóloga a 0 en U
$\to$ dado $a \in U \setminus \gamma$

$$f(a)\, n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

(Dem: sale de dos lemas:

lema: U ab en $\mathbb{C}$
$F : [0,1] \times U \to \mathbb{C}$ continua
tal que $\forall t \in [0,1]$
$z \to F(t, z)$ es holomorfa
$\to$
$(t, z) \to \frac{\partial F}{\partial z}(t, z)$ es
continua en $[0,1] \times U$

lema U ab en $\mathbb{C}$
$F : U \times U \to \mathbb{C}$ cont tal
que $z \to F(w, z)$ es holomorfa
$\forall w \in U$
γ curva contenida en U

$\rightarrow$ $$f(z) = \int_\gamma F(w,z)\,dw$$
es holomorfa en U y además
$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial z}(w,z)\,dw$$

Series de Laurent

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' a_n (z-z_0)^n$$

Converge en
$$U = \{R_- < |z-z_0| < R_+\}$$

Si
$$\sum_{n\geq 0}{}' a_n (z-z_0)^n$$
converge en $|z-z_0| < R_+$

y
$$\sum_{n< 0}{}' a_n (z-z_0)^n$$
converge en $|z-z_0| > R_-$
