CLASE PRÁCTICA MIÉRCOLES 30/10

Un repaso de definiciones y resultados útiles para la práctica 8. Con esto salen todos los ejercicios.

TEMAS

- Convergencia en $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{H}(U)$
- Convergencia de series
- Teoremas de Hurwitz y Montel
- Series de funciones meromorfas

CONVERGENCIA EN $\mathcal{C}(U)$ Y $\mathcal{H}(U)$

Dado $U \subset \mathbb{C}$ abierto no vacío, notamos

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ continua}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa}\}.$$

Es claro que $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{C}(U)$ y que ambos conjuntos son no vacíos, así que toda noción de convergencia en $\mathcal{C}(U)$ induce inmediatamente una noción de convergencia en $\mathcal{H}(U)$.

Una sucesión $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(U)$ es *convergente* en $\mathcal{C}(U)$ si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de U. En tal caso, la función f (bien) definida por $f(z) = \lim_n f_n(z)$ es un elemento de $\mathcal{C}(U)$.

Esta noción de convergencia es *metrizable*, es decir, existe una métrica d en $\mathcal{C}(U)$ tal que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(U)$ si y sólo si $d(f_n, f) \to 0$. Sirve cualquier métrica d de la forma

$$d(f,g) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1 + \|f-g\|_{K_n}}, \tag{1}$$

donde $(K_n)_n$ es cualquier sucesión exhaustiva de compactos de U y las normas $\|\cdot\|_E$ se definen por $\|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|$ para cada $E \subset U$ no vacío. Recordar que $(K_n)_n$ es una *sucesión exhaustiva de compactos de* U si los K_n son compactos, su unión es U y verifican $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ para todo n.

La convergencia uniforme sobre compactos en $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{H}(U)$ tiene las siguientes propiedades:

1) Unicidad de límites: una sucesión en $\mathcal{C}(U)$ no puede converger uniformemente sobre compactos a dos funciones distintas de $\mathcal{C}(U)$.
2) Convergencia puntual: si $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(U)$ converge a $f \in \mathcal{C}(U)$, f_n converge puntualmente a f.
3) Metrizabilidad y completitud: cualquier d de la forma (1) metriza la convergencia uniforme sobre compactos de U y hace de $\mathcal{C}(U)$ un espacio métrico completo.
4) Cerradez de $\mathcal{H}(U)$: si $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(U)$ y cada f_n es holomorfa, su límite, si existe, está en $\mathcal{H}(U)$.
5) Convergencia de las derivadas: si $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ converge a $f \in \mathcal{H}(U)$ uniformemente sobre compactos de U, también lo hace $\big(f_n^{(k)}\big)_n$ a $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

NOTA Las demostraciones de todas las afirmaciones anteriores son ejercicios de Cálculo Avanzado, salvo 4) y 5) que pueden probarse con la Fórmula de Cauchy. Lo vieron en las teóricas.

Ejemplo. Probar que las funciones $f_n(z) = z^n$ convergen uniformemente sobre compactos de $B_1(0)$ pero no lo hacen uniformemente sobre $B_1(0)$.

Resolución. Fijamos $K \subset B_1(0)$ compacto. Notando $\rho := \max_{z \in K} |z| < 1$, para todo $z \in K$ resulta

$$|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n \leq \rho^n \longrightarrow 0$$

y por lo tanto $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 en K. Como K es un compacto arbitrario de $B_1(0)$, esto prueba que $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de $B_1(0)$ a la función nula.

Notando f a la función nula y tomando $z_n = 1 - \frac{1}{n}$, se tiene $(z_n)_n \subset B_1(0)$ y

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = |f_n(z_n)| = \left| \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n \right| = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1} \neq 0,$$

con lo cual $(f_n)_n$ no converge uniformemente a f en $B_1(0)$. $\square$

Ejercicio. Para $U \subset \mathbb{C}$ abierto no vacío mostrar que existen sucesiones $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(U)$ uniformemente convergentes sobre compactos de U que no convergen en el espacio normado $(\mathcal{C}(U), \|\,.\,\|_U)$.

Sugerencia: adaptar la idea del ejemplo anterior construyendo $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(U)$ convergente a la función nula en U, haciendo que la convergencia sea cada vez más lenta al acercarse a ∂U (o a ∞ si $U = \mathbb{C}$).

Ejemplo. Definiendo $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)}$ para $n \in \mathbb{N}$, probar que $\sqrt[n]{z} \longrightarrow 1$ en $\mathcal{C}(\{\operatorname{Re}(z) > 0\})$.

Resolución. Debemos probar que $f_n(z) = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)}$ converge uniformemente sobre compactos de $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ a la función constante 1. Fijando $K \subset \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ compacto, notar que $|\ln(|z|)|$ y $|\operatorname{Arg}(z)|$ alcanzan máximo en K por ser continuas, con lo cual

$$\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z) = \frac{\ln(|z|)}{n} + i\,\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}$$

converge uniformemente a 0 sobre K.

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de la exponencial garantiza la existencia de un entorno V de 0 tal que $|e^z - 1| = |e^z - e^0| < \varepsilon$ para $z \in V$. Tomando $\delta > 0$ con $B_\delta(0) \subset V$, la convergencia uniforme de $\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)$ a 0 sobre K garantiza la existencia de un n_0 tal que $|\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)| < \delta$ para $z \in K$ y $n \geq n_0$. Finalmente, para $z \in K$ y $n \geq n_0$ se obtiene $\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z) \in B_\delta(0) \subset V$ y entonces $|e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)} - 1| < \varepsilon$. $\square$

Ejercicio. Hacer los ejercicios 8 y 9 de la práctica 8.

Ejemplo. Si $f_n(z) = n \operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$, probar que $(f_n)_n$ converge en $\mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Resolución. Notar que para $z \neq 0$ vale la convergencia puntual

$$f_n(z) = n \operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right) = z \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{\left(\frac{z}{n}\right)} \longrightarrow z \cdot 1 = z\,.$$

Esto dice que si $(f_n)_n$ converge en $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, entonces lo hace a $f(z) = z$.

A partir de la serie de Taylor del seno se obtiene $\operatorname{sen}(w) = w + w^3 g(w)$ para $w \in \mathbb{C}$, donde g es una función entera independiente de w. Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$|f_n(z) - z| = \left| n\left[\frac{z}{n} + \frac{z^3}{n^3}\, g\Big(\frac{z}{n}\Big)\right] - z \right| = \left| z^3 g\Big(\frac{z}{n}\Big) \right| \frac{1}{n^2}.$$

Fijamos ahora un compacto $K \subset \mathbb{C}$ y notamos $M = \sup_{w \in \overline{B_1(0)}} |g(w)|$ y $\rho = \sup_{z \in K} |z|$. Por ser K acotado se tiene $\frac{1}{n} K \subset B_1(0)$ para $n \geq n_0(K)$, con lo cual

$$\left| z^3 g\left(\frac{z}{n}\right) \right| \frac{1}{n^2} \leq \rho^3 \cdot M \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{M \cdot \rho^3}{n^2} \quad \text{para todo } z \text{ en } K \text{ y todo } n \geq n_0.$$

Finalmente, para $z \in K$ y $n \geq n_0$ se obtiene

$$|f_n(z) - z| = \left| z^3 g\left(\frac{z}{n}\right) \right| \frac{1}{n^2} \leq \frac{M \cdot \rho^3}{n^2} \longrightarrow 0$$

y por lo tanto $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f(z) = z$ sobre K. □

Ejercicio. Hacer el ejercicio 7 de la práctica 8 usando el ejercicio 9 de esa misma práctica.

CONVERGENCIA DE SERIES

Dados un abierto no vacío $U \subset \mathbb{C}$ y una sucesión $(f_n)_n$ en $\mathcal{C}(U)$, decimos que la serie $\sum_n f_n$ *converge normalmente sobre compactos de* U si para todo compacto $K \subset U$ la serie $\sum_n \|f_n\|_K$ es convergente.

Cuando esto sucede, el Test M de Weierstrass implica que las sumas parciales de la serie $\sum_n f_n$ convergen uniformemente sobre compactos de U, con lo cual la suma de dicha serie está en $\mathcal{C}(U)$.

Si cada f_n es holomorfa, la convergencia normal sobre compactos de U para la serie $\sum_n f_n$ implica que la suma de dicha serie es una función holomorfa en U. Más aun, implica la convergencia uniforme sobre compactos de U para las series de derivadas y se obtienen las igualdades

$$\frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_n f_n(z)\right) = \sum_n f_n^{(k)}(z) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y todo } z \in U.$$

Ejemplo. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{n+1}$ converge normalmente sobre compactos de $\mathbb{C}$ y hallar una expresión cerrada para su suma.

Resolución. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Tomando $R > 0$ con $K \subset B_R(0)$ se obtiene

$$\left\| \frac{2^n}{n!} z^{n+1} \right\|_K = \frac{2^n}{n!} \left\| z^{n+1} \right\|_K \leq \frac{2^n}{n!} \left\| z^{n+1} \right\|_{B_R(0)} = \frac{2^n}{n!} R^{n+1}.$$

Esta acotación prueba la convergencia normal sobre compactos de $\mathbb{C}$ para la serie $\sum_n \frac{2^n}{n!} z^{n+1}$, pues la serie $\sum_n \frac{2^n}{n!} R^{n+1}$ converge para todo $R > 0$ (por ejemplo, aplicando el criterio del cociente).

Para la última parte notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = z\left((-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} \right) = z(e^{2z} - 1)\,.$$ □

Ejemplo. Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z + 2n^2} \tag{2}$$

define una función holomorfa no constante en $B_1(0)$.

Resolución. Para $z \in B_1(0)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\left|z + 2n^2\right| \geq 1$, así que $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z+2n^2}$ es una función holomorfa en $B_1(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $K \subset B_1(0)$ y notando $M = \max_{z \in \overline{B_1(0)}} |\operatorname{sen}(z)|$ se obtiene

$$\left\| \frac{\operatorname{sen}(z)}{z + 2n^2} \right\|_K \leq \left\| \frac{M}{2n^2 - |z|} \right\|_K \leq \frac{M}{2n^2 - 1}.$$

Razonando como en el ejemplo anterior se prueba que la serie (2) converge normalmente sobre compactos de $B_1(0)$ y por lo tanto su suma define una función $f(z)$ holomorfa en $B_1(0)$. Derivando término a término se mantiene la convergencia y vale

$$f'(0) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z + 2n^2} \right)\Bigg|_{z=0} = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{z + 2n^2} \right)\Bigg|_{z=0} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2} \neq 0\,,$$

con lo cual f es no constante en $B_1(0)$. □

TEOREMAS DE HURWITZ Y MONTEL

Dos resultados útiles para estudiar sucesiones de funciones en $\mathcal{H}(U)$ son los teoremas de Hurwitz y de Montel. El Teorema de Hurwitz dice que si $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ converge a f entonces los ceros de las f_n aproximan los ceros de f. El Teorema de Montel es un teorema de (pre)compacidad que permite extraer subsucesiones convergentes de una $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ dada.

Teorema (Hurwitz). *Sean U abierto conexo y $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ tal que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(U)$, con f no idénticamente nula. Si $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ es tal que f no tiene ceros en $\partial B_r(z_0)$, entonces existe n_0 tal que f y f_n tienen el mismo número de ceros en $B_r(z_0)$ para $n \geq n_0$.*

Ejemplo. Considerar las funciones holomorfas $f_n(z) = z^2 - \frac{1}{n^2}$ y notar que convergen uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ a la función $f(z) = z^2$.

Para $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ y $0 < r < |z_0|$ se verifica que f no tiene ceros en $\overline{B_r(z_0)}$ y el teorema de Hurwitz permite concluir que f_n no tiene ceros en $B_r(z_0)$ para n grande. En este ejemplo es evidente, pues los ceros de f_n son $\pm\frac{1}{n}$ y se tiene $\left| \pm \frac{1}{n} - z_0\right| > r$ para n grande.

Para $z_0 = 0$ y $r > 0$ se verifica que f no tiene ceros en $\partial B_r(z_0)$ y tiene exactamente dos ceros en $B_r(z_0)$ (contando con multiplicidad). En este caso el teorema de Hurwitz permite concluir que f_n tiene dos ceros en $B_r(z_0)$ para n grande, lo cual es evidente dado que $\left| \pm \frac{1}{n}\right| < r$ para n grande.

Ejemplo. Sean $U = B_1(0)$ y $f_n(z) = z^n - \frac{1}{n^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Para cada $r > 0$ se verifica que f_n tiene sus n raíces complejas en $B_r(0)$ si n es suficientemente grande. Por el teorema de Hurwitz la sucesión f_n sólo podría converger sobre compactos de U a la función idénticamente nula (pues la cantidad de ceros de f_n en $B_r(0)$ nunca se estaciona). En efecto, se tiene $f_n \to 0$ en $\mathcal{C}(U)$, pues para $K \subset U$ compacto resulta $\rho := \max_{z \in K} |z| < 1$ y entonces

$$\|f_n - 0\|_K = \|f_n\|_K = \max_{z \in K} \left| z^n - \frac{1}{n^n} \right| \leq \max_{z \in K} \left(|z|^n + \frac{1}{n^n} \right) = \rho^n + \frac{1}{n^n} \longrightarrow 0\,.$$

Ejercicio. Decidir si las funciones $f_n(z) = z^n - \frac{1}{n}$ convergen en $\mathcal{C}(B_1(0))$. Estudiar qué pasa con los ceros de f_n cuando n crece. ¿Cómo se relaciona esto con el teorema de Hurwitz?

Vale el siguiente corolario del teorema de Hurwitz.

Corolario. *Sea U abierto conexo y supongamos que $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(U)$.*

1. *Si f_n no tiene ceros en U para $n \geq n_0$ entonces f no tiene ceros en U o $f \equiv 0$ en U.*
2. *Si f_n es inyectiva en U para $n \geq n_0$ entonces f es inyectiva en U o f es constante en U.*

Ejercicio. Construir ejemplos para cada uno de los cuatro casos posibles del corolario anterior.

Ejercicio. Hacer el ejercicio 5 de la práctica 8.

Teorema (Montel). *Sean U abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$. Son equivalentes:*

1. *El conjunto $\mathcal{F}$ tiene clausura compacta en $\mathcal{H}(U)$.*
2. *Para todo $K \subset U$ compacto existe M_K tal que $\|f\|_K \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U)$ se dice *normal* si verifica 1 y *acotada sobre compactos de U* si verifica 2, por lo que el Teorema de Montel puede enunciarse diciendo que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ es normal si y sólo es acotada sobre compactos.

El Teorema de Montel les permite extraer subsucesiones convergentes del mismo modo que lo hacen con el Teorema de Arzelà–Ascoli (sólo que ahora la equicontinuidad sale gratis).

Corolario. *Sean U abierto y $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ una sucesión acotada sobre compactos de U. Entonces existen $f \in \mathcal{H}(U)$ y una subsucesión $(f_{n_j})_j$ tales que $f_{n_j} \longrightarrow f$ en $\mathcal{H}(U)$.*

Ejercicio. Hacer el ejercicio 7 de la práctica 8 usando el Teorema de Montel.

SERIES DE FUNCIONES MEROMORFAS

Para dar sentido a la suma de una serie de funciones meromorfas puede hacerse más o menos lo mismo que para series de funciones continuas, sólo hay que tener cuidado con las singularidades.

Recordar que una función f es *meromorfa en un abierto $U \subset C$* si es holomorfa en U salvo en un conjunto de singularidades aisladas $S \subset U$ donde f tiene polos o singularidades evitables.

Si $\sum_n f_n$ es una serie de funciones meromorfas en U, decimos que $\sum_n f_n$ *converge normalmente sobre compactos de U* si para todo compacto $K \subset U$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$i)$ ninguna f_n con $n \geq n_0$ tiene singularidades en K,

$ii)$ la serie $\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_K$ converge.

La suma de la serie $\sum_n f_n$ se define en $U \backslash S$, siendo S el conjunto singular

$$S = \{z \in U : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_n \text{ tiene una singularidad en } z\} \subset U. \tag{3}$$

Precisamente, dado $z \in U \backslash S$ y tomando $K = \{z\}$, existe n_0 con las propiedades $i)$ + $ii)$ y se define

$$\sum\nolimits_{n \geq 1} f_n(z) := \sum\nolimits_{n=1}^{n_0} f_n(z) + \sum\nolimits_{n > n_0} f_n(z). \tag{4}$$

Ejercicio. Probar que S no tiene puntos de acumulación en U, que (4) no depende del n_0 elegido y que la función $\sum_n f_n$ definida por (4) es meromorfa en U.

Las series de funciones meromorfas también pueden derivarse término a término.

Proposicion. *Si una serie de funciones meromorfas* $\sum_n f_n$ *converge normalmente sobre compactos de* U*, también lo hace su serie de derivadas de orden* k *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Más aun, tomando* S *como en* (3)*, valen las igualdades*

$$\frac{d^k}{dz^k}\Big(\sum\nolimits_n f_n(z)\Big) = \sum\nolimits_n f_n^{(k)}(z) \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N} \textit{ y todo } z \in U \backslash S,$$

donde las sumas de dichas series se interpretan como en (4)*.*

Ejemplo. Probar que la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+z}{n^4 - z^2} \tag{5}$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y estudiar sus singularidades.

Antes de resolver el ejercicio vale aclarar que si queremos estudiar la suma de una serie $\sum_n f_n$ de funciones meromorfas en U es útil empezar con estos tres pasos:

- Paso 1 Estudiar las singularidades S_n de cada f_n y entender cómo es $S = \bigcup_n S_n$.
- Paso 2 Probar la convergencia normal de $\sum_n f_n$ sobre compactos de U.
- Paso 3 Estudiar cada singularidad de $\sum_n f_n$ partiendo la suma adecuadamente.

Resolución. Primero definamos $f_n(z) = \dfrac{n+z}{n^4 - z^2}$ para $n \geq 0$ y estudiemos sus singularidades.

La función $f_0(z) = \dfrac{0+z}{0^4 - z^2} = -\dfrac{1}{z}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene un polo simple en $z = 0$.

La función $f_1(z) = \dfrac{1+z}{1^4 - z^2} = \dfrac{1+z}{1 - z^2}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con un polo simple en $z = 1$ y una singularidad evitable en $z = -1$.

Para $n \geq 2$, la función $f_n(z) = \dfrac{n+z}{n^4 - z^2}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $z = n^2$ y $z = -n^2$.

Ahora que ya sabemos cómo son las singularidades de las f_n vamos a probar que la serie (5) converge normalmente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

Fijemos un compacto $K \subset \mathbb{C}$ y probemos que la serie (5) converge normalmente sobre K, es decir, que existe n_0 con las propiedades $i) + ii)$. Para esto fijamos $R > 0$ con $K \subset B_R(0)$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0^2 > 2R$ y probamos que ese n_0 funciona.

Para $n \geq n_0$ y $z \in K$ obtenemos

$$|n^4 - z^2| \geq n^4 - |z|^2 \geq n_0^4 - R^2 = (n_0^2)^2 - R^2 \geq (2R)^2 - R^2 = 3R^2 > 0,$$

con lo cual f_n no tiene singularidades en K si $n \geq n_0$. Esto prueba que n_0 verifica $i)$.

Para $n \geq n_0$ y $z \in K$ la cuenta anterior dice que $n^4 - z^2$ no se anula, con lo cual f_n está bien definida en $K \subset B_R(0)$. Además es claro que vale la cota

$$\|f_n\|_K = \left\| \frac{n+z}{n^4 - z^2} \right\|_K \leq \left\| \frac{n+|z|}{n^4 - |z|^2} \right\|_K \leq \frac{n+R}{n^4 - R^2}.$$

La serie $\sum_n \frac{n+R}{n^4-R^2}$ converge (comparación por paso al límite con $\sum_n \frac{1}{n^3}$) y entonces la última cota implica que $\sum_{n\geq n_0} \|f_n\|_K$ converge. Esto prueba que n_0 verifica ii).

Como el razonamiento anterior funciona para K arbitrario, hemos probado que la serie (5) converge normalmente sobre compactos de $\mathbb{C}$. Esto nos dice que la suma de (5) es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con singularidades aisladas en

$$S = \{0\} \sqcup \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \sqcup \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\},$$

que es la unión de los conjuntos singulares de las f_n.

Para clasificar las singularidades hay que partir la suma adecuadamente y tomar límite. Escribir bien los detalles no es difícil, pero es un poco tedioso. Por este motivo lo hago sólo para la singularidad en $z = 1$ y les queda como ejercicio escribir los detalles para las otras singularidades.

Queremos estudiar la singularidad en $z = 1$, así que fijamos $\varepsilon > 0$ y el compacto $K = \overline{B_\varepsilon(1)} \subset \mathbb{C}$. Existe un n_0 verificando las propiedades i) + ii) para dicho K. Por i), las únicas f_n que pueden tener singularidades en $z = 1$ son $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n_0}$. Como ya estudiamos las f_n sabemos que hay una única f_n con una singularidad en $z = 1$ y es la f_1.

Ahora tomamos límite en la igualdad

$$\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n=0}^{n_0} f_n(z) + \sum_{n>n_0} f_n(z)$$

para $z \to 1$, pero separando la f_1 porque es la que aporta la singularidad en $z = 1$. Una forma de hacerlo es definiendo $N_0 = \{0\} \cup \{2, \ldots, n_0\}$ para poder escribir $\sum_{n=0}^{n_0} f_n = f_1 + \sum_{n\in N_0} f_n$. Así, para todo $z \in K \backslash S$ tenemos

$$\sum_{n\geq 0} f_n(z) = f_1(z) + \sum_{n\in N_0} f_n(z) + \sum_{n>n_0} f_n(z).$$

El límite $\lim_{z\to 1} \sum_{n\in N_0} f_n(z)$ existe y es finito porque la suma tiene finitos términos y para todas las f_n involucradas existe y es finito el límite $\lim_{z\to 1} f_n(z)$. El límite $\lim_{z\to 1} \sum_{n>n_0} f_n(z)$ existe y es finito porque, por ii), la serie $\sum_{n>n_0} f_n(z)$ define una función holomorfa en $B_\varepsilon(1) \subset K$. Como el límite $\lim_{z\to 1} f_1(z)$ es ∞, por álgebra de límites se obtiene

$$\lim_{z\to 1} \sum_{n\geq 0} f_n(z) = \lim_{z\to 1} \left[f_1(z) + \sum_{n\in N_0} f_n(z) + \sum_{n>n_0} f_n(z) \right] = \infty$$

y por lo tanto $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ tiene un polo en $z = 1$.

Para ver que el polo en $z = 1$ es simple basta notar que $\lim_{z\to 1} (z-1) f_1(z) = -1$ y que, aplicando álgebra de límites otra vez, resulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 1} \left[(z-1) \left(\sum_{n\geq 0} f_n(z) \right) \right] \\
&\quad = \lim_{z\to 1} \left[(z-1) f_1(z) + (z-1) \left(\sum_{n\in N_0} f_n(z) \right) + (z-1) \left(\sum_{n>n_0} f_n(z) \right) \right] \\
&\quad = -1 \;+\; 0 \cdot \lim_{z\to 1} \left(\sum_{n\in N_0} f_n(z) \right) \;+\; 0 \cdot \lim_{z\to 1} \left(\sum_{n>n_0} f_n(z) \right) \\
&\quad = -1 + 0 + 0 = -1,
\end{aligned}$$

pues los límites $\lim_{z\to 1} \sum_{n\in N_0} f_n(z)$ y $\lim_{z\to 1} \sum_{n>n_0} f_n(z)$ son finitos (ya explicamos por qué). $\square$