Geometría Diferencial - Práctica 8.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. Sea ∇ una conexión afín sobre M, y sea (U, x) una carta.

   a) Demostrar que hay una única matriz de 1-formas ω_i^j en U, llamadas las 1-formas de conexión para esta carta, tal que

   $$\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega_i^j(X) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

   para todo $X \in TM$.

   b) Demostar las primeras ecuaciones de estructura de Cartan.

   $$d\varphi^j = \varphi^i \wedge \omega_i^j + \tau^j$$

   donde $\{\tau^1, \tau^2, ..., \tau^n\}$ son las 2-formas de torsión, definidas en términos del tensor de torsión por

   $$\tau(X, Y) = \tau^j(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

2. Sea ∇ una conexión sobre (M, g), una variedad de Riemann. Demostrar que ∇ es compatible con g sii las 1-formas de conexión ω_i^j del ejercicio anterior asociadas a la carta (U, x) satisfacen

   $$g_{jk}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k = dg_{ij}.$$

   En particular, la matriz ω_i^j de 1-formas de la conexión Riemanniana con respecto a unos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ortonormales es antisimétrica.

3. Recordemos que que un campo vectorial V se dice paralelo si $\nabla V \equiv 0$ (es decir, $\nabla_X V = 0 \quad \forall X$).

   a) Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $V_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Demostrar que V_p tiene una única extensión a un campo vectorial paralelo sobre $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea U un abierto de la esfera S^2 sobre el cual están definidas las coordenadas esféricas (θ, φ) y sea $V = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Computar $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} V$ y $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} V$ y concluir que V es paralelo *a lo largo* del ecuador y de todos los meridianos.

   c) Sea $p = (0, \frac{\pi}{2})$ en coordenadas esféricas. Demostrar que V_p no tiene extensión paralela a ninguna vecindad de p.

d) Usar *a*) y *c*) para demostrar que ninguna vecindad de p es isométrica a algún abierto de $\mathbb{R}^2$.

4. Sean que $\widetilde{M}$ y M variedades suaves y $p : \widetilde{M} \to M$ una submersión sobreyectiva. Para todo $y \in M$ la fibra sobre y, denotada por $\widetilde{M}_y$, es la imagen inversa $p^{-1}(y) \subset \widetilde{M}$. Por el teorema de la función implícita es una subvariedad embebida y cerrada. Si $\widetilde{M}$ tiene una métrica Riemanniana $\widetilde{g}$, en cada punto $x \in \widetilde{M}$ el espacio tangente $T\widetilde{M}_x$ se descompone en una suma directa ortogonal
$$T\widetilde{M}_x = H_x \oplus V_x$$
donde $V_x := Ker(p_*)$ es el espacio vertical y $H_x := V_x^{\perp}$ es el espacio horizontal. Si g es una métrica Riemanniana, p se dice una submersión Riemanniana si $\widetilde{g}(X,Y) = g(p_*X, p_*Y)$ cuando X, Y son horizontales.

   a) Demostrar que todo campo vectorial W sobre $\widetilde{M}$ puede ser escrito de forma única como $W = W^H + W^V$, donde W^H es horizontal y W^V es vertical y ambos son suaves.

   b) Si X es un campo vectorial sobre M, demostrar que hay un único campo suve horizontal $\widetilde{X}$ sobre $\widetilde{M}$, llamado levantamiento horizontal de X, que es $p - relacionado$ a X ($p_*\widetilde{X}_q = X_{p(q)}$).

   c) Sea G un grupo de Lie actuando suavemente sobre $\widetilde{M}$ por isometrías de $\widetilde{g}$ tal que $p \circ \varphi = p \ \forall \ \varphi \in G$ y que G actúa transitivamente en cada fibra $\widetilde{M}_y$. Demostrar que hay una única métrica Riemanniana g sobre M tal que p es una submersión Riemanniana.

5. Sea $p : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ una submersión Riemanniana. Un campo vectorial sobre $\widetilde{M}$ se dice horizontal o vertical si sus valores están en el subespacio horizontal o vertical respectivamente en cada punto.

   a) Sean X, Y campos vectoriales sobre M. Demostrar que

      i) $\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle = p^* \langle X, Y \rangle$,

      ii) $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]^H = \widetilde{[X,Y]}$,

      iii) $\left[\widetilde{X}, W\right]$ es vertical si W es vertical.

   b) Sean $\widetilde{\nabla}$ y ∇ las conexiones Riemannianas de $\widetilde{g}$ y g. Demostrar que para campos vectoriales X, Y sobre M vale la siguiente igualdad.
$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$$

6. Sea ∇ la conexión Riemanniana en una variedad (M,g) y sean las 1-formas de conexión ω_i^j del ejercicio 1) con respecto a la carta (U,x). Definir una matriz de 2-formas Ω_i^j, llamada la 2-forma de curvatura, por

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j dx^k \wedge dx^l.$$

Demostrar que Ω_i^j satisface la segunda ecuación estructural de Cartan:

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

7. *a*) Demostrar que si $u \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in X(M)$, entonces

$$\nabla^2 u(X,Y) = Y(Xu) - (\nabla_Y X)u.$$

b) Si η es una 1-forma, sea

$$\eta_{i;jk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

la expresión local de $\nabla^2 \eta$. Demostrar la dentidad de Ricci:

$$\eta_{i;jk} - \eta_{i;kj} = R_{jki}^l \eta_l.$$

8. Sea ∇ una conexión lineal sobre la variedad M. ∇ se dice plana si $R(X,Y)Z \equiv 0$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones.

   a) ∇ es plana.

   b) Cerca de todo punto $p \in M$, existe un marco local paralelo.

   c) Para cada par $p, q \in M$ la traslación paralela a lo largo de una curva γ desde p a q depende sólo de la clase de hopotopía de γ.

   d) La traslación paralela a lo largo de una curva cerrada suficientemente pequeña es la identidad.

9. Sea (M,g) una variedad Riemanniana orientada con elemento de volumen dV. El operador de divergencia div : $X(M) \to C^\infty(M)$ está definido por

$$d(i_X dV) = (\mathrm{div} X) dV$$

donde i_X denota la multiplicación interior por X.

a) Sea M compacta, orientada y Riemannniana con frontera. Demostrar el siguiente teorema de la divergencia para $X \in X(M)$.

$$\int_M \mathrm{div} X \; dV = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \, d\widetilde{V}$$

donde N es la normal unitaria exterior a ∂M y $d\widetilde{V}$ es el elemento de volumen inducido por la métrica sobre ∂M.

b) Demostrar que el operador de divergencia satisface la siguiente regla del producto para funciones suaves $u \in C^\infty(M)$.

$$\mathrm{div}(uX) = u \mathrm{div} X + \langle \mathrm{grad}\ u, X \rangle$$

(donde grad$u$ es el campo definido por $\langle \mathrm{grad} u, - \rangle = du$) y deducir la siguiente fórmula de integración por partes.

$$\int_M \langle \mathrm{grad}\ u, X \rangle \, dV = -\int_M u \mathrm{div} X \; dV + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \, d\widetilde{V}$$

10. Sea $f \in C^\infty(M)$, con M una variedad Riemanniana orientable. Definimos

$$\Delta f := \mathrm{div}(\mathrm{grad} f).$$

a) Mostrar que en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual este operador es el Laplaciano usual.

b) Sea M Riemanniana orientada compacta sin borde. Utilizar el teorema de Stokes para probar que si f es armónica (i.e. $\Delta f = 0$) entonces

$$\int_M |\mathrm{grad} f|^2 dV = 0.$$

Concluir que en variedades compactas las únicas funciones armónicas son las (localmente) constantes.

11. Sea G un grupo de Lie con una métrica bi-invariante g. Demostrar que la curvatura Riemanniana de g satisface

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}\,[Z, [X,Y]]$$

donde X, Y, Z son campos vectoriales invariantes a izquierda por G.

Vectores de Killing

Sea g una forma bilineal. Definimos la derivada de Lie en la dirección de un campo K por

$$(L_K g)(X,Y) := K(g(X,Y)) - g([K,X],Y) - g(X,[K,Y]).$$

12. Mostrar que la expresión anterior es C^∞-lineal en X e Y, y por lo tanto define un tensor (forma bilineal) $L_K g : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to C^\infty M$.

13. Mostrar que si en coordenadas g tiene la expresión $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, entonces

$$L_K g = K(g_{ij}) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dK(x^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dK(x^j).$$

14. Mostrar que $L_K g = 0$ si y sólo si el flujo asociado a K es una isometría con respecto a g.

15. Mostrar que si ∇ es una conexión sin torsión compatible con g, entonces la condición $L_K g = 0$ es equivalente a la ecuación

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0 \quad \forall X, Y.$$

    Un tal campo vectorial se denomina un vector de Killing.

16. Mostrar que si K y K' son dos vectores de Killing entonces $[K, K']$ también es vector de Killing.

17. Sea K un vector de Killing. Queremos ver qué condiciones debe cumplir una función f para que fK también sea de Killing. Mostrar que si $K_p \neq 0$, entonces $K_p(f) = 0$. Mostrar que si $X_p \perp K_p$ entonces $X_p(f) = 0$ y concluir que si K es no nulo en un abierto denso (y M conexo), entonces f debe ser constante.

18. Considerar en (el abierto coordenado de) la esfera S^2, los campos ∂_θ y ∂_ϕ. ¿Es alguno de ellos un vector de Killing? Lo mismo en el Toro embebido en $\mathbb{R}^3$ con radios r y R, y los campos vectoriales ∂_{θ_i}, $i = 1, 2$, donde θ_i son las variables angulares. Hallar *todos* los vectores de Killing de $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual.

19. Sea M una variedad Riemanniana orientable, K un vector de Killing y Ω_g la forma de volumen determinada por la orientación y la métrica. Mostrar que $L_K \Omega = 0$ y concluir que K tiene divergencia cero. ¿Esto explica alguna parte del ejercicio anterior?