Geometría Diferencial - Práctica 7.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. *a*) Consideramos g en $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$. Sea (U, x) la carta tal que $x^{-1} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2$ es

$$x^{-1}(\theta, \alpha) = (\sin(\theta)\cos(\alpha), \sec(\theta)\cos(\alpha), \cos(\theta)).$$

   Encontrar la expresión local de la métrica g en la carta (U, x). Expresar el elemento de volumen en la misma carta (es decir una 2-forma ω tal que $\omega(p)(v_1, v_2) = \pm 1$ si $\{v_1, v_2\}$ es base ortonormal de S^2_p). Calcule los símbolos de Cristoffel.

   b) $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) : y > 0\}$ (semiplano de Poincaré) Con respecto a la carta usual $(\mathbb{R}^2_+, id)$ consideramos la métrica $g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

   c) Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$. Ver que el teorema de Levi-civita se puede extender a métricas pseudo-Riemannianas.

2. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad X de manera propiamente discontinua. Supongameos que en X se tiene una métrica g.

   a) Definir el concepto de "métrica G-invariante".

   b) Probar que si g es G-invariante, entonces la variedad X/G hereda una métrica de X, i.e. tiene una métrica con la que la proyección $X \to X/G$ es un morfismo de variedades de Riemann.

   c) Probar que si G es finito, $\overline{g} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} d^* \rho_h(g)$ es invariante (se denota por $\rho_h(g)$ la acción de $h \in G$ sobre X).

   d) ¿Qué sucede si en el punto anterior se tiene una métrica de tipo (r,s)?

3. Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ hereda una métrica de S^n.

4. Escribir la ecuación de geodésica en términos de los símbolos de Christoffel. Mostrar que las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, y que las geodésicas en el semiplano de Poincaré son o bien rectas verticales, o bien semicírculos con centro en el eje x.

5. Probar que si (U, x) es una carta de M, entonces la asignación

$$(X, \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

define una conexión en U.

6. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ su torsión. Probar que T es $\mathcal{F}(M)-$bilineal, y por lo tanto define un tensor de tipo (1,2).

7. Probar las siguientes afirmaciones.

   a) Una combinación lineal $\sum_i \alpha_i \nabla_i$, donde los ∇_i son conexiones y $\sum_i \alpha_i = 1$, es una conexión.

   b) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

8. Probar que si ∇ es una conexión con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

9. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^{n}$.. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M la métrica pull-back de g y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Probar que para campos $X, Y \in X(M)$, coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $i_*(Y)$ en la dirección de $i_*(X)$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.

10. Sea M una variedad diferenciable de diemensión n y ∇ una conexión en M. Si $c : I \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in I$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de $M_{c(t_0)}$, sean $X_1, \ldots, X_n \in X_c^{||}$ (campos paralelos a lo largo de c) de modo que $X_i(t_0) = v_i$.

    a) Ver que $X_c^{||}$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

    b) $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son linealmente independientes en $M_{c(t)}$ $\forall t \in I$.

    c) Si $Y \in X_c^{||}$ es tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t)$. Deducir la dimensión de $X_c^{||}$

11. Calcule $\nabla_{\partial_r}\partial_\theta$, $\nabla_{\partial_r}\partial_r$ y $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta$, para ∇ la conexión standard de $\mathbb{R}^2$ y (r,θ) las coordenadas polares. (Sugerencia: calcule los símbolos de Cristoffel a partir de la métrica).

12. Sea M una variedad Riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita. Si $\sigma : [a,b] \to M$ es una curva y X_t, Y_t son campos a lo largo de t (i.e. $X_t, Y_t \in T_{\sigma(t)}M$ para cada $t \in [a,b]$) muestre que $\langle X, Y\rangle' = \langle \nabla_{\dot\sigma} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{\dot\sigma} Y\rangle$. Concluya que el transporte paralelo con respecto a la conexión de Levi-Civita preserva la norma (y ángulos), es decir $\mathrm{Hol}_p \subseteq \mathrm{SO}(T_pM)$. Concluya también que si σ es una geodésica, entonces $||\dot\sigma||$ es constante.

13. A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwartz para $L^2[a,b]$ sabemos que $\int_a^b ||\dot\sigma(t)||dt \leq (b-a)(\int_a^b ||\dot\sigma(t)||^2 dt)^{1/2}$. Por lo tanto, si queremos minimizar $\int_a^b ||\dot\sigma(t)||dt$, podríamos intentar minimizar $(\int_a^b ||\dot\sigma(t)||^2 dt)^{1/2}$, o $\int_a^b ||\dot\sigma(t)||^2 dt$. Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\int_a^b ||\dot\sigma(t)||^2 dt$, y compare con la ecuación de geodésica.

14. Sea G un grupo de Lie y $X_1, \ldots, X_n$ una base de campos invariantes a izquierda. Muestre que si $Y_1, \ldots, Y_n$ es otra base de campos invariantes a izquierda, entonces existe una matriz de constantes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que $X_i(p) = \sum_j a_{ij} Y_j(p)$ para todo $p \in M$. Si definimos las conexiones en G determinadas por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ y $\overline{\nabla}_{Y_i} Y_j = 0$ muestre que $\nabla = \overline{\nabla}$ (en consecuencia ∇ es una conexión natural asociada a G). Muestre que la curvatura asociada a ∇ es identicamente nula; sin embargo, la torsion es no nula. Si $\widetilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}T$, cuál es el tensor de curvatura?

15. Considerar el toro T^2 como grupo de Lie. Con respecto a la conexión del ejercicio anterior, tiene torsión ∇?, cuál es la curvatura asociada a $\widetilde{\nabla}$? Si consideramos el toro parametrizado en $\mathbb{R}^3$ con radios R y r, como subvariedad de $\mathbb{R}^3$ tiene una métrica Riemanniana y una conexión de Levi-Civita. Calcule los símbolos de Cristoffel en la carta angular (θ_1, θ_2), calcule la curvatura. Da cero?

16. Utilice las identidades del tensor de curvatura ($R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$) etc.) dadas en clase para probar que en variedades de dimensión dos R tiene una única componente independiente. Calcule una de ellas para el semiplano de Poincaré, y para la esfera S^2.

17. Sea G un grupo de Lie y ∇ la conexión en donde $\nabla_X Y = 0$ si X e Y son invariantes a izquierda. Si $p \in G$ y $v \in T_pM$ sea X^v el único campo invariante a izquierda que vale v en p y σ^v la única curva integral de X^v que pasa por p en $t = 0$. Muestre que σ^v coincide con la (única) geodésica que pasa por p en $t = 0$ a velocidad v. En particular, para $p = 1_G$, la exponencial en el sentido geodésico coincide con la exponencial definida en grupos de Lie.