Geometría Diferencial - Práctica 6.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada M cumple las siguientes propiedades

   a) Si $-M$ denota la variedad on la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.

   b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

   c) Si ω es una n-forma continua y positiva entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se da slo si $\omega = 0$.

   d) Si $f : M \to N$ es un difeo y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientacón.

2. Sea $\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Probar que α es una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcular la integral de α sobre S^1. Concluir que α no es exacta. Concluir que $i^*\alpha$ no es exacta, donde $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es la inmersión canónica.

3. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\omega(x) = \sum_i \frac{(-1)^i x_i}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

   a) Probar que ω es cerrada pero no exacta.

   b) Calcular $\int_{S^{n-1}} \omega$.

   c) Calcular la integral de ω sobre el elipsoide $\{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$.

4. Sea M variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Probar que

   a) Si S es subvariedad de M compacta, sin borde y orientada de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M, entonces $\int_S \omega = 0$.

   b) Si W es subvariedad de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k orientadas, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$

5. Probar que si M es compacta, orientable y sin borde de dimensión n, entonces una n-forma nunca nula no es exacta.

6. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2.
   (Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta; ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.)

7. Sea M variedad riemanniana orientada. Se define la n-forma *de volumen* V como la única que cumple $V_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ortonormal orientada de T_pM. En coordenadas locales (U, ϕ), se tiene $(\phi^{-1})^*(V) = \sqrt{g} dx_1 \ldots dx_n$, donde $g = \det(g_{ij})$.

   a) Calcular la matriz (g_{ij}) para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y cilíndricas.

   b) Calcular la matriz (g_{ij}) y la forma de volumen para $^S1$ y S^2, y calcular los respectivos volmenes.

8. Sea ω la forma de volumen de una variedad riemanniana orientada M de dimensión n. Sean $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ campos de vectores en M. Probar que

$$\omega(X_1, \ldots, X_n) \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_n) = \det\{< X_i, Y_j >\}.$$

   Probar también que

$$\omega(X_1, \ldots, X_n)\omega = \tilde{X}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{X}_n$$

   donde $\tilde{X}_i$ es la 1-forma dual (va la estructura riemanniana) al campo X_i.

9. Dada M variedad de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, se da a M la estructura riemanniana inducida, es decir para $p \in M$ y $v, w \in T_pM$ vale $< v, w >_p := < df(v), df(w) >_{f(p)}$.

   Supongamos que M es orientada, y que η es el campo de vectores normales unitarios en $f(M)$ que dan la orientación. Probar que la forma de volumen en M es dada por

$$\omega = f^*(i(\eta)(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})).$$

10. Calcular la cohomología con soporte compacto de $\mathbb{R}$. Sugerencia: Para grado uno, considerar

$$\phi : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega.$$

11. Lema de Poincaré para soporte compacto. Dada una variedad M, se tiene un isomorfismo $H_c^q(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{q-1}(M)$. Probarlo en el caso en que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

    Sugerencia: Definir $\varphi : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{*-1}(M)$ de la siguiente manera. Los $\omega \in \Omega_c^k(M \times \mathbb{R})$ son de dos tipos.

    i) Si $\omega = \alpha(x,t) dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}$, $\varphi(\omega) = 0$;
    ii) si $\omega = \alpha(x,t) dt \wedge dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik-1}$, $\varphi(\omega) = (\int_{\mathbb{R}} \alpha(x,t)dt) dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik-1}$.

    Probar que φ está bien definida, y que es morfismo de complejos. Luego hacer lo mismo para $\psi : \Omega_c^{*-1}(M) \to \Omega_c^*(M \times \mathbb{R})$, $\psi(\omega) = e \wedge \omega$ con $e = e(t)dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} e(t)dt = 1$. Observar que $\varphi\psi = 1_{\Omega_c^{*-1}}$ y probar que $\psi\varphi \simeq 1_{\Omega_c^*(M\times\mathbb{R})}$ vía la homotopía: $\kappa : \Omega_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{*-1}(M \times \mathbb{R})$ definida en los ω del primer tipo como cero y en los del segundo por

$$\kappa(\alpha(x,t)dt \wedge dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik-1}) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(x,u)du - \int_{-\infty}^{t} e(u)du. \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x,u)du.$$

    Concluir que

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n. \end{cases}$$

12. Dado $U \subseteq M$ un abierto e $i : U \hookrightarrow M$ la inclusión, se define $i_* : \Omega_c^q(U) \to \Omega_c^q(M)$ como

$$i_*(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{en } U \\ 0 & \text{en } M \setminus \mathrm{sop}\omega. \end{cases}$$

    Mostrar que i_* es un morfismo de complejos de cadena.

13. Teorema de Mayer-Vietoris para soporte compacto. Sean U, V abiertos de una variedad M tales que $U \cup V = M$. Mostrar la exactitud de la siguiente sucesión de complejos de cadena.

$$0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} \Omega_c^*(M) \to 0$$

    Concluir que el cubrimiento induce la siguiente sucesión exacta en homología.

$$0 \to H_c^0(U \cap V) \to H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) \to H_c^0(M) \to H_c^1(U \cap V) \to \cdots$$

14. Usando los ejercicios 10 y 13, calcular $H^*_{dR}(S^1)$.

15. Sean U, V abiertos de una variedad M tales que $U \cup V = M$. Probar que si las cohomologías (de de Rham o de soporte compacto) de ambos abiertos son de dimensión finita, también lo es la de M.

16. Si M es una variedad de tipo finito, entonces las cohomologías de de Rham y de soporte compacto de M son de dimensión finita.

17. (Interpretación del morfismo de conexión en las sucesiones de Mayer-Vietoris) Sean U_1, U_2 abiertos de una variedad M tales que $U_1 \cup U_2 = M$. Notemos ∂ a los morfismos de conexión de las sucesiones de Mayer-Vietoris: $H^*_c(M) \xrightarrow{\partial^*} H^{*+1}_c(U_{12}), H^*_{dR}(U_{12}) \xrightarrow{\partial^*} H^{*+1}_{dR}(M)$.

    a) Sea $[\omega] \in H^q_c(M)$. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^q_c(M)$ con sop$\omega_i \subseteq U_i$, y $\omega_i|_{U_{12}} = \omega$ (las formas ω_i se obtienen multiplicando a la forma original por una partición de la unidad subordinada al cubrimiento). Entonces $\partial[\omega] = [d\omega_1|_{U_{12}}] = [d\omega_2|_{U_{12}}]$. (¿Por qué no es esto siempre nulo en $[\omega] \in H^q_c(U_{12})$?)

    b) Sea $[\omega] \in H^q_{dR}(U_{12})$. Sean $\omega_i \in \Omega^q_{dR}(U_i)$ tales que $\omega_i|_{U_{12}} = \omega$ (las formas ω_i se obtienen de la siguiente manera

    $$\omega_i = \begin{cases} \rho_j \omega & \text{en } U_{12} \\ 0 & \text{en } U_i \setminus \text{sop}\rho_j, \end{cases}$$

    donde $\{\rho_1, \rho_2\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento). Entonces $\partial[\omega] = [\tau]$ con τ tal que $\tau|_{U_i} = d\omega_i$.

18. Sea M una variedad de dimensión n.

    a) Si $\omega \in \Omega^q(M)$ y $\widetilde{\omega} \in \Omega^{n-q}_c$, entonces $\omega \wedge \widetilde{\omega} \in \Omega^n_c(M)$.

    b) Si además $d\omega = 0, d\widetilde{\omega} = 0$, entonces $d(\omega \wedge \widetilde{\omega}) = 0$.

    c) Si además existe η tal que $\omega = d\eta$, entonces existe ν tal que $d\nu = \omega \wedge \widetilde{\omega}$.

    Concluir que se tiene una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal $\wedge : H^q(M) \times H^{n-q}_c(M) \to H^n_c(M)$.

19. Sea M una variedad de dimensión n, orientable y sin borde. Probar que está bien definido el siguiente morfismo $\mathbb{R}$-lineal.

    $$\int_M : H^n_c(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Usando el ejercicio anterior, observar que se tiene un morfismo

$$\phi : H^q(M) \to (H_c^{n-q}(M))^*, \qquad \phi[\omega]([\widetilde{\omega}]) = \int_M \omega \wedge \widetilde{\omega}.$$

20. *a*) Sean W, T abiertos de una variedad M tales que $W \subseteq T$. Mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} H^q(T) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\phi"] & H^q(W) \arrow[d, "\phi"] \\ (H_c^{n-q}(T))^* \arrow[r, "i'"] & (H_c^{n-q}(W))^* \end{tikzcd}$$

(i' es la aplicación dual a i_*)

b) Sean U, V abiertos de una variedad M. Mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} H^q(U \cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi"] & H^{q+1}(U \cup V) \arrow[d, "\phi"] \\ (H_c^{n-q}(U \cap V))^* \arrow[r, "(-1)^{q+1}\partial'"] & (H_c^{n-(q+1)}(U \cup V))^* \end{tikzcd}$$

(∂' es la aplicación dual a ∂)

c) Sean U, V abiertos de una variedad M. Mostrar que el siguiente diagrama conmuta salvo signos.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^q(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & H^q(U) \oplus H^q(V) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi,\phi)"] & {} \\ \cdots \arrow[r] & (H_c^{n-q}(U \cup V))^* \arrow[r, "i'"] & (H_c^{n-q}(U))^* \oplus (H_c^{n-q}(V))^* \arrow[r, "i'"] & {} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H^q(U \cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi"] & H^{q+1}(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ {} \arrow[r] & (H_c^{n-q}(U \cap V))^* \arrow[r, "\partial'"] & (H_c^{n-(q+1)}(U \cup V))^* \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Sugerencia: usar el item 20*a* para las inclusiones $U \subseteq U \cup V, V \subseteq U \cup V, U \cap V \subseteq U, U \cap V \subseteq V$ para algunos cuadrados y el item 20*b* para el resto.

21. Lema de los 5. Considerar el siguiente diagrama conmutativo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con filas exactas.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\ F \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[r] & I \arrow[r] & J \end{tikzcd}$$

Mostrar que si b y d son isomorfismos, a es epimorfismo y e es monomorfismo, entonces c es isomorfismo.

22. Sean U, V abiertos de una variedad M. Mostrar que si la aplicación ϕ es un isomorfismo para las variedades U, V y $U \cap V$, entonces también lo es para $U \cup V$. (Sugerencia: usar el lema de los 5 y los ejercicios anteriores).

23. Dualidad de Poincaré. Sea M una variedad de dimensión n, orientable y sin borde (suponer además de tipo finito). Probar que

$$\phi : H^q_{dR}(M) \to (H^{n-q}_c(M))^*$$

es un isomorfismo para todo $0 \leq q \leq n$. Concluir que $H^q_{dR}(M) \simeq H^{n-q}_c(M)$ y que, si además M es compacta,

$$H^q(M) \simeq H^{n-q}(M).$$

(Sugerencia: usar inducción; el primer paso es el ejercicio 11).

24. Calcular la cohomología del Toro.

25. Sea M una variedad compacta, orientable y sin borde, de dimensión positiva. Probar que M no es contráctil.