Geometría Diferencial - Práctica 5.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. Dado el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales y transformaciones lineales con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j"] & W \arrow[r, "\pi"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   mostrar que $i(\mathrm{Ker} f) \subseteq \mathrm{Ker} g$, $p(\mathrm{Ker} g) \subseteq \mathrm{Ker} h$, y que las aplicaciones $\overline{j} : V/f(A) \to W/g(B)$ y $\overline{\pi} : W/g(B) \to L/h(C)$ dadas respectivamente por $\overline{j}[v] = [j(v)]$ y $\overline{\pi}[w] = [\pi w]$ están bien definidas, y que más aún, las siguientes son sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \xrightarrow{i|_{\mathrm{Ker} f}} \mathrm{Ker} g \xrightarrow{p|_{\mathrm{Ker} g}} \mathrm{Ker} h$$

$$V/f(A) \xrightarrow{\overline{j}} W/g(B) \xrightarrow{\overline{\pi}} L/h(C) \longrightarrow 0$$

2. Completar los detalles de la demostración dada en clase del Lema de la Serpiente.

3. (Característica de Euler de un espacio graduado de dimensión finita) Sea $C = \oplus_n C^n$ un espacio vectorial graduado de dimensión total finita (i.e. $\dim(\oplus_n C^n) < \infty$), se define su característica de Euler $\chi(C)$ por

$$\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim C^n.$$

   Si además C tiene un diferencial que lo convierte en un complejo

$$0 \to C^{n_0} \to C^{n_0+1} \to C^{n_0+2} \to \ \cdots \ \to C^{m_0} \to 0 \ ,$$

   considerando

$$0 \to \frac{C^{n_0+1}}{d(C^{n_0})} \to C^{n_0+1} \to \cdots \to C^{m_0} \to 0$$

   y haciendo inducción en la longitud del complejo (y usando el teorema de la dimensión), mostrar que $\chi(C) = \chi(\oplus H^n(C,d))$. Conluir que si (C,d) es un complejo exacto, entonces $\chi(C) = 0$.

4. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta corta de complejos de dimensión finita. Mostrar que $\chi(B) = \chi(A)+\chi(C)$. (Sugerencias: calcular la relación grado a grado entre $\dim A^n$, $\dim B^n$ y $\dim C^n$, o utilizar la existencia de la sucesión exacta larga en homología.)

5. (Característica de Euler de una variedad) Sea M una variedad diferenciable tal que $\dim(\oplus_k H^k_{dR}(M)) < \infty$; se define la característica de Euler de M como

$$\chi(M) := \chi(\oplus_k H^k_{dR}(M)) = \sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M).$$

Si $M = U_1 \cup U_2$ con U_1 y U_2 abiertos, mostrar que

$$\chi(M) = \chi(U_1) + \chi(U_2) - \chi(U_{12})$$

(Sugerencia: utilizar Mayer-Vietoris).

6. Calcular la característica de Euler de S^1, del cilindro $(S^1 \times (a,b))$, de la banda de Möbius, de S^2, de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{R}^n \setminus V$ donde V es un subespacio de dimensión $k < n$.

7. Sea M una superficie (i.e. una variedad de dimensión 2); utilizando la fórmula de Mayer-Vietoris, mostrar que si a M se le quita un abierto (contenido en una carta) homeomorfo a un disco (i.e. a S se la "perfora con un sacabocados") entonces su característica de Euler *disminuye* exactamente en uno (haga un dibujo local). Muestre que si se le agrega una manija (o asa), entonces (¡haga un dibujo local!) su característica de Euler disminuye en dos. Concluya que la característica de Euler del toro es cero, y que la de una superficie de género g (un "toro con g-asas") tiene característica 2-2g.

8. Calcular la cohomología de De Rham de $U = \mathbb{R}^3 \setminus S$ donde $S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. ¿Vale el teorema de campos conservativos en U? es decir, si F es un campo vectorial, es un gradiente si y sólo si su rotor es cero? Si su divergencia fuera cero, ¿existirá otro campo A tal que $F = \nabla \times A$?

9. Utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, mostrar que (como variedades diferenciables) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong O(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ y que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cong SO(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$. Concluir que

$$H^\bullet(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \cong H^\bullet(O(n,\mathbb{R})), \ \text{ y } H^\bullet(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})) \cong H^\bullet(SO(n,\mathbb{R})).$$

En particular, $H^\bullet(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) \cong H^\bullet(S^1)$.

10. Sea X un campo vectorial en M; utilizando la fórmula

$$L_X\omega = i_X d\omega + d i_X \omega$$

mostrar que $L_X d = dL_X$ (y por lo tanto L_X está bien definido en cohomología). Mostrar además que para toda $[\omega] \in H^k_{dR}$ vale $[L_X\omega] = 0$.

11. Sea G un grupo de Lie conexo y $\mathfrak{g} := T_eG$ el espacio tangente en la identidad (isomorfo al álgebra de Lie de los campos invariantes a izquierda), y consideremos la función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Como $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial, identificaremos su espacio tangente en cualquier punto con él mismo, en particular identificaremos $T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Bajo esta identificación, mostrar que $\exp_{*_0}(v) = v$, es decir, el diferencial de la exponencial en el cero es la identidad. Concluir que la imagen de la exponencial contiene un entorno abierto de la identidad, y que en un grupo de Lie cualquiera, el *subgrupo generado* por la imagen de la exponencial coincide con la componente conexa de la identidad en G.

12. Sea G un grupo de Lie y $\omega \in \Omega^k G$ una k-forma; diremos que ω es *invariante a izquierda* si para todo $g \in G$, $L_g^*\omega_h = \omega_{gh}$. Supongamos $g = \exp(v)$, para cierto $v \in T_1G$; mostrar que si X^v es el único campo invariante a izquierda que en 1 vale v, entonces

$$L_{\exp(tv)} = \phi_t^{X^v}$$

(donde ϕ_t^X es el flujo asociado al campo X) y en particular $L_g = \phi_1^{X^v}$. Concluir (o bien utilizando la fórmula de $L_X = i_X d + d i_X$ o bien con la invarianza homotópica con ϕ_t^X) que para toda $[\omega] \in H^k_{dR}(M)$ vale $[\omega] = [L_g^*\omega]$. Concluir que vale la misma fórmula para todo g en la componente conexa de la identidad de G.