# Geometría Diferencial - Práctica 4.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. Mostrar que el plano proyectivo real y la banda de Möbius no son orientables.

2. Sea $M$ una variedad de dimensión 2, que admite un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tal que las composiciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ son *holomorfas*, identificando los abiertos de $\mathbb{R}^2$ con los abiertos de $\mathbb{C}$. Mostrar que $M$ resulta orientable.

3. Mostrar que $M$ admite una $n$-forma nunca nula (i.e. $M$ orientable) si y sólo si $\Lambda^n T^*M \cong M \times \mathbb{R}$ ($\cong$ denota un isomorfismo de fibrados).

4. Si $M$ admite un atlas constituido por dos cartas tales que la intersección de sus dominios es conexa, probar que es orientable.

5. Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$. Probar que:

   a) $TM$ es orientable.

   b) $T^*M$ es orientable.

   c) Si $TM$ es trivial, entonces $M$ es orientable.

6. Probar que todo grupo de Lie es orientable.

7. Sean $M$ y $N$ variedades diferencibles de dimensión $n$ y $k$ respectivamente. Probar la equivalencia de

   a) $M$ y $N$ son orientables.

   b) $M \times N$ es orientable.

8. Sea $M = U_1 \cup U_2$ con $U_i$ abiertos, y llamemos $U_{12}$ a $U_1 \cap U_2$. Considerar el cubrimiento dado por $\{U_i : i = 1, 2\}$, y sea $\{f_1, f_2\}$ una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Si $g \in C^\infty(U_{12})$, mostrar que

$$g_1(p) := \begin{cases} f_2(p)g(p) & \text{si } p \in U_{12} \\ 0 & \text{si } p \in U_1 \setminus \mathrm{sop} f_2 \end{cases}$$

resulta suave en $U_1$, es decir $g_1 \in C^\infty(U_1)$. De manera análoga construir una $g_2 \in C^\infty(U_2)$. Concluir que toda función $g \in C^\infty(U_{12})$ se escribe como

$$g = g_1|_{U_{12}} + g_2|_{U_{12}}$$

donde $g_i \in C^\infty(U_i)$. Muestre a través de un ejemplo, que no toda $g \in C^\infty(U_{12})$ es la restricciónde función en $C^\infty(U_1)$. El (contra)ejemplo puede ocurrir en $M = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$, $U_1 = (-2, 1)$ y $U_2 = (-1, 2)$.

9. Sea $f : N \to M$ una aplicación diferenciable. Probar que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ satisface las siguientes propiedades

   a) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
   b) $f^*(g \cdot \omega) = g \circ f \cdot f^*(\omega)$ si $g \in \mathcal{F}(M)$
   c) $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\theta)$

10. Sean $A$ y $B$ abiertos de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \to B$ diferenciable. Probar:

    a) $f^*(dx_i) = df_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k$.
    b) $f^*(g.dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f.\det(\frac{\partial \mathrm{f_i}}{\partial \mathrm{x_j}}).\mathrm{dx_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{dx_n}$, para $g \in \mathcal{F}(B)$.

11. Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$ y $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(M)$ tales que $\omega_1(p), \omega_2(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Probar que

    a) Si $\omega \in \Omega^n(M)$, existe una única función $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\omega = f \cdot \omega_1$.
    b) Son equivalentes las siguientes afirmaciones
       i) $\omega_1$ y $\omega_2$ inducen la misma orientación.
       ii) $\omega_2 = \varphi \cdot \omega_1$, con $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ y $\varphi(q) > 0$ para todo $q \in M$.
    c) Si $M$ es conexa y $\omega_2 = g \cdot \omega_1$, entonces $g > 0$ en $M$ o bien $g < 0$ en $M$.

12. Si $\omega$ es una $k$-forma, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim M = 3$?

13. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $df : M \to T^*M$ definida por

    $$df(p) : T_pM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(f).$$

    Mostrar que en un sistema de coordenadas $(U, x)$, $df$ se escribe como

    $$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

    por lo que $df$ resulta una sección diferenciable, es decir, una 1-forma.

14. Sean $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, mostrar que $f\eta \in \Omega^1(\mathbb{R})$. Mostrar además que si $g \in \mathcal{F}(M)$, entonces

    $$d(fg) = fdg + gdf.$$

15. Sea $M = \mathbb{R}^n$. En cada punto su tangente es $\mathbb{R}^n$, con su producto interno usual. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, y definamos $\langle X, - \rangle$ de la siguiente manera. Si $v \in T_pM$, $\langle X, v \rangle := \langle X(p), v \rangle$.

a) Mostrar que $\langle X, - \rangle$ es una 1-forma.

b) Mostrar que toda 1-forma es de esta forma.
Por ejemplo, $df = \langle \bigtriangledown f, - \rangle$.

16. Si $(U, x)$ es una carta de la variedad $M$, sea $\omega_x \in \Omega^n(U)$ definida por $\omega_x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Llamaremos a $\omega_x$ la $n$-forma asociada a la carta $(U, x)$.

    a) Verificar que $\omega_x(p)(\frac{\partial}{\partial x^1} \mid_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \mid_p) = 1$ para todo $p \in U$.

    b) Sea $(V, y)$ otra carta de $M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Probar que $\omega_y(p) = J_{y \circ x^{-1}}(p)\omega_x(p)$ para todo $p \in U \cap V$. Es decir,

    $$dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n = J_{y \circ x^{-1}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

    sobre $U \cap V$, donde $J_{y \circ x^{-1}}$ indica el jacobiano de la aplicación $y \circ x^{-1}$.

17. Sean $M$ una variedad diferenciable, $p \in M$, $v \in T_pM$ y $\gamma \in T_pM^*$. Probar que existen $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tales que $X(p) = v$ y $\theta(p) = \gamma$.

18. Sean $M$ una variedad diferenciable, $W$ un abierto no vacío de $M$, $Z \in \mathfrak{X}(W)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(W)$ y $p \in W$. Probar que

    a) Existe un abierto $U$ de $M$ con $p \in U \subseteq W$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X \mid_U = Z \mid_U$.

    b) Existe un abierto $V$ de $M$ con $p \in V \subseteq W$ y una 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\theta \mid_V = \omega \mid_V$.

19. Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$ y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos una derivación con signo

    $$i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M), \quad i_X(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(X(p), v_1, \ldots, v_{k-1}),$$

    donde vemos a $\omega$ como un campo de aplicaciones multilineales alternadas. Para 0-formas definimos $i_X(f) = 0$.

    Sea $(U, x)$ una carta alrededor de $p$, y escribamos $X$ y $\omega$ en coordenadas locales como

    $$X \mid_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \omega \mid_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

    Escribir en coordenadas locales $i_X(\omega)$.

20. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable en el sentido usual.

*a*) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de $\omega_F^1$ en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, probar que una 1-forma $\omega$ en $\mathbb{R}^3$ determina un único campo $G$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.

*b*) Demostrar que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma $\omega$ define un único campo $G$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.

*c*) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre

1) $df$ y $\nabla f$;
2) $\text{rot}F$ y $d\omega_F^1$;
3) $\text{div}F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).

Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas $\text{rot}\nabla \equiv 0$ y $\text{divrot} \equiv 0$.

21. Sean $M$ una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^k(M)$. Decimos que $\omega$ es cerrada si $d\omega = 0$ y decimos que $\omega$ es exacta si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. Probar que:

*a*) Toda forma exacta es cerrada.

*b*) Si $\omega, \omega'$ son cerradas y $\omega''$ es exacta entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.

*c*) Si $f : M \to N$ es diferenciable, entonces $f^*$ transforma formas cerradas en cerradas y exactas en exactas.

22. Sea $\eta \in \Omega^1(M)$ y $\sigma : [a, b] \to M$ continua y suave a trozos. Definimos

$$\int_\sigma \eta := \int_a^b \eta(\sigma'(t))dt$$

*a*) Mostrar que si $h : [c, d] \to [a, b]$ es biyectiva, creciente y derivable, entonces

$$\int_\sigma \eta = \int_{\sigma \circ h} \eta$$

Notar que esto significa que la integral depende de la curva "geométrica" $Im(\sigma)$ y no de su parametrización (siempre que se respete la orientación de la curva). Mostrar que si en cambio la reparametrización $h$ fuera decreciente entonces

$$\int_{\sigma \circ h} \eta = -\int_\sigma \eta$$

*b*) Si $f \in C^\infty(M)$, $\sigma(a) = p$, $\sigma(b) = q$, entonces

$$\int_\sigma df = f(q) - f(p)$$

23. (Derivada de Lie de formas) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sean $\omega$, $\eta$ formas. Probar que:

    *a*) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$;

    *b*) $\mathcal{L}_X(\omega) = d\mathcal{L}_X(\omega)$;

    *c*) $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$, si $f \in \mathcal{F}(M)$.

    Probar que estas propiedades determinan unívocamente a $\mathcal{L}_X$. Utilizar este hecho para dar una definición algebraica de $\mathcal{L}_X$. Mostrar que $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$. Hallar la expresión en coordenadas locales.

24. Mostrar las siguientes identidades.

    *a*) $i_X i_Y = -i_Y i_X$

    *b*) $i_{fX} = f i_X$

    *c*) $i_X d + d i_X = \mathcal{L}_X$

    *d*) $\mathcal{L}_{fX} = f\mathcal{L}_X + df \wedge i_X$

    *e*) $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}$