Geometría Diferencial - Práctica 3.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. a) Sea $M = S^2$ la esfera, y sea $f : S^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$. Escribir explícitamente la matriz de la transformación lineal f_{*_p} para todo $p \in S^2$, utilizando en cada caso la carta que considere apropiada. ¿Tiene f_{*_p} siempre el mismo rango?

   b) Hacer los mismos cálculos para la variedad $T^2_{R,r}$= el toro de radios R y r embebido en $\mathbb{R}^3$ (i.e. la superficie de revolucion alrededor del eje z generada por el círculo de radio r en el plano xz con centro $(R, 0, 0)$, suponemos $0 < r < R$) y la "misma" función $f(x, y, z) = z$.

2. Sea $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$ tal que $f(p)$ es un máximo local. Mostrar que $f_{*_p} = 0$.

3. (Tangente como en el Warner) Sea M una vareiedad y sea $p \in M$, se define $C^\infty_p(M)$ como el conjunto de pares (f, U) donde U es un abierto que contiene a p y $f \in C^\infty(U)$, dividido por la relación de equivalencia $(f, U) \sim (g, V)$ si y sólo si $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ (notar que $(f, U) \sim (f|_{U\cap V}, U\cap V)$ y $(g, V) \sim (g|_{U\cap V}, U \cap V)$). Mostrar que $C^\infty_p(M)$ tiene bien definida una suma y un producto, y que si $[f]$ denota la clase de un par (f, U), está bien definida la aplicación evaluar en p: $[f] \mapsto f(p)$, por lo tanto está bien definido el conjunto $\mathcal{M} = \{[f] \in C^\infty_p(M)/\sim_p\colon f(p) = 0\}$. Mostrar que es un ideal (maximal) y que $T_pM \cong (\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)^*$ de manera canónica.

4. Sean $f \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, mostrar la igualdad

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$$

   de dos formas:

   a) con las propiedades de las derivaciones y del corchete de Lie,

   b) con la expresión en coordenadas de los campos y el corchete de Lie.

5. Si en $T^2_{R,r}$ tomamos coordenadas θ^1=ángulo de revolución con respecto al eje z y θ^2= ángulo de parametrización standard del círculo en el plano xz, mostrar que $\frac{\partial}{\partial\theta^1}$ y $\frac{\partial}{\partial\theta^2}$ son campos vectoriales globalmente definidos. Más aún, si le damos a $T^2_{R,r}$ la estructura de grupo de Lie que proviene del difeomorfismo $T^2_{R,r} \cong S^1 \times S^1$, mostrar que estos campos son invariantes a izquierda.

6. Mostrar que si (U, ϕ) es una carta alrededor de p, entonces

$$c(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + te_i)$$

es curva integral del campo $\frac{\partial}{\partial \phi^i}$ que pasa por p en $t = 0$. Describir explícitamnete estas curvas para todo punto p de $T^2_{R,r}$.

7. Sea G un grupo de Lie, X un campo invariante a izquierda, y c una curva integral de X con $c(0) = 1_G$, definida en un cierto intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. Mostrar que para todo $g \in G$, la curva $c^g := L_g \circ c$, es decir $c^g(t) = g.c(t)$, es curva integral de X, y pasa por g en $t = 0$. Utilizando este hecho, dar un argumento para mostrar que los campos invariantes a izquierda en un grupo de Lie siempre son completos, es decir, sus curvas integrales están definidas para todo t.

8. Sea $\rho : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie (i.e. ρ es suave, y es morfismo de grupos). Si $c : \mathbb{R} \to G$ es una curva tal que $c(0) = 1_G$, $c'(0) = v$, y c es curva integral del único campo invariante a izquierda en G que vale v en 1_G, entonces $\rho \circ c$ verifica lo mismo en H, es decir, $\rho \circ c(0) = 1_H$, y si llamamos $\widetilde{v} := (\rho \circ c)'(0)$ $(=\rho_{*_{1_G}}(v))$, entonces $\rho \circ c$ es curva integral del único campo de H invariante a izquierda que vale $\widetilde{v}$ en 1_H.

9. Considerar el campo en $\mathbb{R}^2$ definido por $X(x, y) = (-y, x) = -y\partial_x + x\partial_y$. Encontrar las curvas integrales. ¿Es este campo completo? para cada t, mostrar que ϕ_t= rotación en ángulo t.

10. Considerar en $\mathbb{R}^n$ un campo "lineal", es decir

$$X(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \partial_{x_j}$$

donde los a_{ij} son constantes. Describir las curvas integrales y el flujo de este campo en términos de la matriz A de coeficientes $(A)_{ij} = a_{ij}$.

11. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$. Mostrar que es un grupo de Lie. En la carta evidente, si $X(a, b) = f(a, b)\partial_a + g(a, b)\partial_b$ es un campo, ¿qué condiciones deben cumplir f y g para que X sea invariante a izquierda? ¿Es abeliana el álgebra de Lie de campos invariantes a izquierda?

12. Sea (U, P) la carta en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a las coordenadas polares, es decir $P^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r, \sin\theta)$ (¿quién puede ser U?).

a) Utilizar la fórmula de cambio de base para mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

b) Invertir esta relación para escribir $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

c) Calcular el Laplaciano ($\Delta = (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2$) en coordenadas polares.

13. Sea X un campo invariante a izquierda en un grupo de Lie G.

a) Mostrar que X es completo.

b) Si $v \in T_{1_G}G$ y X^v es el único campo invariante a izquierda con $X^v(1_G) = v$, definimos la "exponencial de v" como

$$\exp(v) := c^v(1) \in G$$

donde c^v es la (única) curva integral de X^v que verifica $c^v(0) = \mathrm{Id}$. Mostrar que si $[X^v, X^w] = 0$ entonces $\exp(v + w) = \exp(v)\exp(w)$.

14. Sea $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ el grupo de Lie de matrices inversibles n por n. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c^A : \mathbb{R} \to G$ está dada por

$$c^A(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

a) Mostrar algún argumento para probar que $c^A : \mathbb{R} \to G$ es diferenciable (por ejemplo escribiendo a A en su forma de Jordan...).

b) Mostrar que $c'(t) = e^{tA}A$ (derivada en el sentido usual de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^N$).

c) Interpretar la fórmula anterior en términos de las definiciones de $\dot{c}^A$ como $c^A_*(d/dt)$ (= combinación lineal de $\frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_{c^A(t)}$) y mostrar que la igualdad anterior dice que c^A es la (única) curva integral del (único) campo invariante a izquierda X_A que verifica

$$X_A(\mathrm{Id}) = \text{“}A\text{”} = \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_{\mathrm{Id}}$$

d) Concluir que, en este caso, la exponencial $\mathbb{R}^{n\times n} \cong T_1G \to G$ de grupos de Lie en abstracto coincide con la exponencial usual de matrices.

e) Mostrar, utilizando las propiedades de la exponencial abtracta y lo que sabemos sobre el corchete de campos, que si $[A, B] = 0$ (en $\mathbb{R}^{n\times n}$) entonces $e^{A+B} = e^A e^B$. Encontrar dos matrices A y B tales que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

15. Sea $\rho : H \to G$ un morfismo de grupos y $\rho_{*_1} : T_{1_H} H \to T_{1_G} G$ la aplicación inducida en los tangentes. Consideremos $\exp^G$ y $\exp^H$ las funciones exponenciales de G y H respectivamente. Mostrar que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T_{1_H} H \arrow[r, "\rho_{*_1}"] \arrow[d, "\exp^H"] & T_{1_G} G \arrow[d, "\exp^G"] \\ H \arrow[r, "\rho"] & G \end{tikzcd}$$

Notar que, aplicado al caso $G = \mathrm{GL}$ y ρ la inclusión de algún subgrupo de Lie, este resultado dice lo siguiente "la exponencial abstracta en cualquier subgrupo de Lie de matrices coincide con la exponencial usual". En particular, por ejemplo, si $\mathrm{tr} A = 0$ entonces $\det(e^A) = 1$.

16. Consideremos $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \times)$ el álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente igual a $\mathbb{R}^3$ y corchete de Lie dado por producto vectorial (¡chequear Jacobi!). Definimos la transformación lineal

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$$

$$v \mapsto \rho_v$$

dada por $\rho_v := v \times w$.

a) Mostrar que ρ es un morfismo de álgebras de Lie (considerando en $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ el corchete de Lie dado por el conmutador).

b) Mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $v \in \mathfrak{g}$, resulta $\exp(t\rho_v)$ (como exponencial de un endomorfismo) una rotación en $\mathbb{R}^3$.

(Pista: derivando, mostrar que preserva la norma, o el producto interno; y por continuidad mostrar que tiene determinante positivo).

De hecho, es la rotación en el eje v (suponiendo $v \neq 0$), de ángulo $t||v||$.

c) Mostrar que ρ provee un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $T_{\mathrm{Id}} O(3, \mathbb{R})$.

(Pista: calcular la dimensión del grupo de Lie $O(3, \mathbb{R})$, ¿con esto basta? ¿por qué?)

17. Sean M una variedad diferenciable, $r \geq 1$ y $T : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{X}(M)$ una función $\mathcal{F}(M)-$multilineal. Sea $\overline{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^r \to \mathcal{F}(M)$ definida por

$$\overline{T}(\theta, X_1, \ldots, X_r) = \theta(T(X_1, \ldots, X_r))$$

para $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

a) $\overline{T}$ es $\mathcal{F}(M)-$multilineal, i.e., es un campo vectorial del tipo (1,r) sobre M.

b) La función $T \mapsto \overline{T}$ es un isomorfismo.

18. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sea $L_X Y = [X, Y]$. ¿Es $L_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ un campo tensorial del tipo $(1, 1)$?