Geometría Diferencial - Práctica 2.

Primer cuatrimestre de 2010.

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigcup_{p\in M} M_p$, i.e., la unión de todos los espacios tagentes. Sea $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(v) = p$ si $v \in M_p$.

   Para cada $(U, x) \in \mathcal{D}$, sea $TU = \bigcup_{p\in U} M_p \subset TM$ y $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ la aplicación definida por

   $$\overline{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), ..., v(x^n))$$

   o equivalentemente,

   $$\overline{x}(\sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), ..., x^n(p), v(x^1), ..., v(x^n))$$

   para cada $p \in U$ y $v \in M_p$.

   Denotando con $\overline{x} = (\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n, \overline{x}^{n+1}, ..., \overline{x}^{2n})$, será

   $$\overline{x}^i(v) = x^i(\pi(v)) = x^i \circ \pi(v) \text{ y } \overline{x}^{n+i}(v) = v(x^i)$$

   para $1 \leq i \leq n$. Verificar

   a) $\overline{x} : TU \to x(U)\times\mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa $\overline{x}^{-1}(a, b^1, ..., b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{x^{-1}(a)}$ para cada $a \in x(U)$.

   b) Si $(V, y) \in \mathcal{D}$ y $U\cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{x}(TU\cap TV)\times\mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$.

   c) En la situación de b), la biyección $\overline{x} \circ \overline{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ está dada por

   $$\overline{x}\circ\overline{y}^{-1}(a, b) = \left(x \circ y^{-1}(a), \sum_{i=1}^{n} b^i\frac{\partial(x^1 \circ y^{-1})}{\partial u^i}|_a, ..., \sum_{i=1}^{n} b^i\frac{\partial(x^n \circ y^{-1})}{\partial u^i}|_a\right)$$

   concluir que es diferenciable.

   d) Utilizando el criterio para construir variedades diferenciables, deducir que TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$ para la cual las cartas $(TU, \overline{x})$ resultan admisibles.

e) Con dicha estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \to M$ resulta diferenciable.

2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que la aplicación $df : TM \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Dado $p \in U$, sea $a = x(p)$. Probar que $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \to M_p$ satisface $(x^{-1})_{*a}(D_i \mid_a) = \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p$ para todo $1 \leq i \leq n$.

4. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$. Probar que

   a) Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.

   b) Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

5. Calcular f_{*p} para

   a) $f : M \times N \to M$, $f = \pi_1$.

   b) $f : M \times N \to M$, $f = \pi_2$.

   c) $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n_\rho$, $f(u) = \rho u$.

   d) $f : E \to F$, tranformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(u, v) = (u^2v + v^2, u - 2v^3, v\exp(u))$. Hallar la matriz de $f_{*(1,2)}$ y $g_{*(u,v)}$ y calcular $g_{*(0,1)}(4\frac{\partial}{\partial u} \mid_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial v} \mid_{(0,1)})$.

7. Sea M una variedad de dimensión n. Sean $\pi : TM \to M$ la proyección natural y $v \in TM$. Calcular $\pi_{*v}(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} \mid_v)$, siendo $(TU, \overline{x})$ la carta de TM asociada a la carta (U, x) de $\pi(v)$.