Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2010
Fibrados vectoriales

1. Prefibrados

Definición 1.1. *Sea M una variedad y V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un* prefibrado *(vectorial) sobre M es una variedad E (espacio total) junto con una función diferenciable y suryectiva $\pi : E \to M$ tal que para cada $x \in M$, la "fibra" $V_x := \pi^{-1}(x)$ está equipada con una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Los sigueintes son ejemplos de prefibrados, que en realidad serán ejemplos de fibrados, una vez que hayamos dado la definición:

Ejemplo 1.2. *Si M es una variedad y V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces $E = M \times V$ y $\pi : M \times V \to M$ dada por $\pi(x, v) = x$ es un (pre)fibrado, que llamaremos* **fibrado trivial***, con fibra V. Notar que $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times V$.*

Ejemplo 1.3. *Si M es una variedad, TM y T^*M son (pre)fibrados sobre M.*

Definición 1.4. *Si E es un prefibrado sobre M y E' es un prefibrado sobre N, Un morfismo $f : E \to E'$ de prefibrados es un par de funciones $F : E \to E'$, $f : M \to N$ suaves tales que*

1. *$\pi_{E'} F = f \pi_E$, o gráficamente, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

   Notar que esto implica que $F(\pi_E^{-1}(p)) \subseteq \pi_{E'}^{-1}(f(p))$, es decir, F manda la fibra sobre p a la fibra sobre $f_0(p)$.

2. *para cada $p \in M$, $F|_{\pi_E^{-1}(p)} : \pi_E^{-1}(p) \to \pi_{E'}^{-1}(f(p)$ es una transformación lineal.*

Diremos que dos fibrados son isomorfos si hay morfismos de fibrados entre ellos tales que las respectivas composiciones dan las funciones identidades respectivas.

Observación 1.5. *Sea $U \subset M$ un abierto y $\pi : E \to M$ un prefibrado sobre M, entonces el subconjunto (abierto!) $\pi^{-1}(U)$ es de manera canónica un prefibrado sobre U, que se denota $E|_U$.*

2. Fibrados

Definición 2.1. *Un* **fibrado** *sobre M con fibra tipica V es un prefibrado tal que para todo $p \in M$, existe un abierto U que contiene a p (llamado trivializante) tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times V$ (isomorfismo de prefibrados).*

La variedad E se llama **espacio total**, la variedad M se llama **base**, la aplicación π se llama **proyección**, un abierto U como antes se llama **abierto trivializante**. Una aplicación suave entre fibrados se dir'a morfismo de fibrados si es morfismo de prefibrados.

3. Funciones de transición

Sea E un fibrado sobre M; por definición, existe $\{U_i\}$ cubrimiento de M por abiertos trivializantes, con isomorfismos de trivialización

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times V$$

Si $U_{ij} := U_i \cap U_j$ es no vacio, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \times V \arrow[r, "\phi_i^{-1}"] \arrow[dr] & \pi^{-1}(U_{ij}) \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d] & U_{ij} \times V \arrow[dl] \\ & U_{ij} & \end{tikzcd}$$

con lo que se obtienen las llamadas funciones de transición

$$\phi_{ij} := \phi_j \phi_i^{-1}$$

Observación 3.1. *Si $F : U \times V \to U \times V$ es un morfismo de fibrados (sobre la identidad), entonces F es de la forma*

$$F(u, v) = (u, F_u(v))$$

donde, para cada $u \in U$, $F_u : V \to V$ es una transformación lineal. Por lo tanto, dar un morfismo de fibrados $U \times V \to U \times V$ es equivaelnte a dar una aplicación $U \to \mathrm{End}(V)$, determinada por $u \mapsto F_u(-)$.

Bajo la identificación anterior, las funciones de transición pueden considerarse como funciones $U_{ij} \to \mathrm{GL}(V)$,

Proposition 3.2. *Sea V un espacio vectorial, M una variedad, U_1 y U_2 dos abiertos de M tales que $U_1 \cup U_2 = M$. Sea $\phi : U_{12} \to \mathrm{GL}(V)$ una función diferenciable. Entonces existe un único (a menos de isomorfismo) fibrado E tal que U_1 y U_2 son dos abiertos trivializantes y la función de transición está dada por $\phi_{12}(u, v) = (u, \phi_u(v)$, donde ϕ_u es una notación para $\phi(u) \in \mathrm{GL}(V)$.*

Demostración. Existencia: Tomamos $E := (U_1 \times V \times \{1\} \coprod W \times V \times \{2\})/\sim$ donde relacionamos $(u, v, 1) \sim (u, \phi_u(v), 2)$ para todo $u \in U_{12}$. En el producto cartesiano ponemos la topología producto, en la unión disjunta la topología de unión disjunta, y en el cociente la topología cociente.

Ejercicio 3.3. *Notar que $U_1 \times V$ y $U_2 \times V$ son claramente variedades diferenciables. Probar E admite una única estructura diferenciable tal que $U_1 \times V \times \{1\}$ y $U_2 \times V \times \{2\}$ son abiertos.*

Observar que la función $\pi : E \to M$ dada por $\overline{(x, v, *)} \mapsto x$ ($* = 1, 2$) está bien definida. Definimos $\phi_1 : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ por

$$\phi_1\left(\overline{(u, v, 1)}\right) = (u, v),$$

y $\phi_2 : \pi^{-1}(W) \to W \times V$ por

$$\phi_2\left(\overline{(w, v, 2)}\right) = (w, v).$$

Notando que, para $x \in U \cap V$, $\overline{(x, v, 1)} = \overline{(x, \phi_x(v), 2)}$, vemos que la fórmula de la función de transición es la que queríamos. □

Ejemplo 3.4. *(La banda de Moebius.) Sea* $B = S^1$*, que la pensamos como* $U := S^1 \setminus \{(0,1)\}$ *unión* $W := S^1 \setminus \{(0,-1)\}$*. Consideramos los fibrados* $U \times \mathbb{R}$ *y* $W \times \mathbb{R}$*, y los pegamos según la fórmula:*

$$\phi : V \cap W \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Convencerse que es un fibrado.

Observación 3.5. *Supongamos que tenemos un fibrado con cubrimiento trivializante* $\{U_i\}$ *y trivializaciones elegidas. Si* U_{ijk} *es no vacío, de la definición de las funciones trivializantes* ϕ_{ij} *se verifica trivialmente la relacion de "cociclo"* $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$ *en* U_{ijk}*.*

Dejamos como ejercicio la construcción analoga a la proposición anterior para un cubrimiento por mas de dos abiertos:

Proposition 3.6. *Sea* M *una variedad y* $\{U_i\}$ *un cubrimiento arbitrario por abiertos. Si* $\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(V)$ *son funciones suaves que verifican trivialmente las condiciones de compatibilidad* $\phi_{ii} = \mathrm{id}$*, y* $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$ *cada vez que* $U_{ijk} \neq \emptyset$*, entonces existe un (unico a menos de isomorfismo) fibrado vectorial* E *sobre* M *que tiene a los* U_i *como abiertos trivializantes y funciones de transición dadas por las* ϕ_{ij}*.*

Ejemplo 3.7. *Recordar que el espacio proyectivo real* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \ / \ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ *consiste en el conjunto de rectas en* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Se define el siguiente subconjunto de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$*:*

$$\mathcal{U} := \{((x_0 : \cdots : x_n), v) \ / \ (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ y \ v \in \langle (x_0 : \cdots : x_n) \rangle\}$$

donde $\langle (x_0 : \cdots : x_n) \rangle$ *significa la recta generada por* $(x_0, \ldots, x_n)$*. Probar que* $\mathcal{U}$ *es una variedad diferenciable, de dimensión* $n+1$*, y que la proyección* $\pi : \mathcal{U} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$((x_0 : \cdots : x_n), v) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$$

hace de $\mathcal{U}$ *un fibrado (de linea) sobre* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$*. Este fibrado se llama Fibrado Universal, o Fibrado Taultológico.*

Ejercicio 3.8. *Para* $n = 1$*, encuentre explícitamente los abiertos trivializantes. Defina el fibrado tautológico para las Grasmanianas.*

4. Fibrados de linea

Definición 4.1. *Un fibrado con fibra de dimensión uno se llamará* **fibrado de linea***.*

Ejercicio 4.2. *Sea* $\pi : L \to M$ *un fibrado de linea, supondremos* M *conexo. Si* $m \in M$*. llamemos* 0_m *al cero del espacio vectorial* V_m*. Consideremos el conjunto* $L_0 := \{(m, 0_m) : \ / \ m \in M\}$*. Demostrar que si* L *es un fibrado de linea trivial, entonces* $L \setminus L_0$ *tiene dos componentes conexas.*

Ejemplo 4.3. *Demuestre que el fibrado de linea "banda de Moebius"no es trivial. Observe que puede comprobar este hecho empíricamente, recortando por el medio una banda de Moebius, y viendo que queda conexo.*

Ejercicio 4.4. *Probar que el fibrado tangente a* S^1 *es trivial. En general, probar que el fibrado tangente a cualquier grupo de Lie es trivial.*

5. Operaciones con fibrados

Observación 5.1. *Supongamos que tenemos dado un fibrado a partir de las funcioens de transición, a valores en un cierto* $\mathrm{GL}(V)$. *Entonces, si tenemos un funtor (covariante) cualquiera sobre la categoría de espacios vectoriales y transformacioens lineales (o de esp. vec. y transf. inversibles), entonces la condicion de compatibilidad sobre las funciones de transicion*

$$\phi_{ii} = \mathrm{id},\ \phi_{jk}\phi_{ij} = \phi_{ik}$$

claramente se preservan por funtores, y por lo tanto, se puede .[a]plicar.[el] funtor al fibrado.

Ejemplo 5.2. *Si* $f \in \mathrm{GL}(V)$, *entonces* $(f^*)^{-1} \in \mathrm{GL}(V^*)$, *y esta aplicación verifica*

$$(\mathrm{id}_V^*)^{-1} = \mathrm{id}_{V^*}$$

$$((f \circ g)^*)^{-1} = ((g^* \circ f^*)^{-1} = (f^*)^{-1} \circ (g^*)^{-1}$$

Por lo tanto, si tenemos un fibrado E *con fibra tipica* V, *obtenemos las funciones de transición* ϕ_{ij}, *y las funciones* $(\phi_{ij}^*)^{-1}$ *permiten construir un fibrado con fibra tipica* V^*, *al que llamaremos* E^*.

Ejemplo 5.3. *Considerando el producto de espacios vectoriales (i.e. la categoría Vec× Vec) se puede hacer la siguiente construcción: Si* E *y* H *son dos fibrados sobre* M, *de fibra* V *y* W *respectivamente, se puede considerar (eventialmente refinando) un cubrimiento que trivialice* simultaneamente *a* E *y a* H, *y asi obtener funciones de transición (en los mismos abiertos)*

$$\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(V)$$

correspondientes a E, *y*

$$\psi_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(W)$$

correspondientes a H. *A partir de estas dos, es claro que las funciones*

$$\phi_{ij} \oplus \psi_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \phi_{ij,u} & 0 \\ 0 & \psi_{ij,u} \end{pmatrix}$$

verifican las condiciones de compatibilidad necesarias para definir un fibrado con fibra tipica $V \oplus W$, *que se denota* $E \oplus H$

Ejemplo 5.4. *Sean* $E \to M$ *y* $H \to M$ *dos fibrados, con fibra tipica* V *y* W. *Dejamos como ejercicio definir las funciones de transición para las siguientes construcciones*

1. $\mathrm{Hom}(V, W)$.
2. *Como caso particular del anterior, dado* $\pi : E \to B$ *un fibrado, se puede considerar el fibrado de linea trivial* $E := B \times \mathbb{R}$. *La construccion anterior debería dar la el ejemplo* E^* *comentado anteriormente.*
3. $\mathrm{Bil}(V \times W')$.
4. $V \otimes W$

5. *Notar que* $V \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V^*, W) \cong \mathrm{Hom}(W^*, V)$*, y por lo tanto, se podria usar esa descripcion para definir el fibrado* $E \otimes H$*. Mostrar que resulta equivalente.*

6. *Si* F *y* G *son dos funtores entre la categoria de espacios vectoriales de (dimension finita) y* $\eta : F \to G$ *es un isomorfismo natural de funtores para todo fibrado* E*, la construccion del fibrado* $F(E)$ *resulta un fibrado isomorfo a* $G(E)$*.*

7. *Notar que* $\mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{R}) \cong (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$*. Concluir que* $\mathrm{Bil}(E \times H) \cong (E \otimes H)^* \cong E^* \otimes H^*$*.*

8. *(Multivectores y covectores) Si* E *es un fibrado, se puede definir* $E^{\otimes r} \otimes (E^*)^{\otimes s}$*,* $\Lambda^r E$*,* $\Lambda^r E^*$*,* $S^r E$*, sumas de ellos, productos tensoriales, etc.*

Ejercicio 5.5. *Sea* $\pi : L \to B$ *un bibrado de linea. Demuestre que* $\mathrm{End}(L) = \mathrm{Hom}(L, L) = L^* \otimes L$ *es un fibrado de linea trivial. Sugerencia: considere la seccion "constantemente identidad"*

Ejemplo 5.6. 1. *Con la notacion anterior,* $T^*M = (TM)^*$*.*

2. *Los tensores de tipo* r, s *son por definición, secciones al fibrado* $(TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$*.*

6. Secciones

Definición 6.1. *Sea* $\pi : E \to M$ *un fibrado, una sección es una función diferenciable* $s : M \to E$ *tal que* $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$*. Es decir, para cada punto* $p \in M$ *se elige un vector* $v \in V_p$ *(donde* $V_p := \pi^{-1}(p)$*), y esta elección varía diferenciablemente con respecto a* p*. El conjunto de secciones de un fibrado* E *se denotará* $\Gamma(M, E)$*.*

Ejemplo 6.2. *En el caso particular del tangente y el cotangente, la notación standard es*

1. $\Gamma(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$.

2. $\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$.

Ejercicio 6.3. *Si* $\pi : E \to M$ *es un fibrado, demuestre que con las operaciones punto a punto* $\Gamma(M, E)$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, más aún, es un* $C^\infty(M)$*-módulo.*

Ejercicio 6.4. *Sea* $E = M \times V$ *el fibrado trivial con fibra* V*, entonces* $\Gamma(M, E) \cong C^\infty(M, V) \cong C^\infty(M)^n$ *donde* $n = \dim(V)$*. Es decir,* $\Gamma(M, E)$ *es un* $C^\infty(M)$*-módulo libre de rango* $\dim(V)$*.*

Theorem 6.5. *Se tiene una correspondencia 1-1 entre*

1. *Funciones* $C^\infty(M)$*-multilineales* $T : \mathfrak{X}(M)^r \times \Omega^1(M)^s \to C^\infty(M)$

2. *secciones (suaves!)* $T \in \Gamma(M, T^*M^{\otimes r} \otimes (TM)^{\otimes s})$*.*

En particular, si $A = C^\infty(M)$*, tenemos que* $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{X}(M), A) = \Omega^1(M)$ *y* $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1(M), A) = \mathfrak{X}(M)$*.*

Demostración. Supongamos que tenemos una sección $s : M \to T^*M^{\otimes r} \otimes (TM)^{\otimes s}$, y sean $X^1, \ldots, X^r \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta^1, \ldots, \eta^s \in \Omega^1$ campos y formas. Entonces, podemos asignar la función T_s definida en M, que a cada punto de M le asigna el numero

$$m \mapsto s_m(X_p^1 \otimes \ldots \otimes X_p^r \otimes \eta_p^1 \otimes \ldots \otimes \eta_p^s)$$

donde hemos identificado $s_p \in\to (T_pM^*)^{\otimes r} \otimes (T_pM)^{\otimes s} \cong (T_pM^{\otimes r})^* \otimes T_p^{**}M^{\otimes s} \cong (T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s})^*$. Notar que esto depende suavemente de p, por lo tanto, el resultado (fijados los campos y las 1-formas), es una función suave.

Esto da una regla que, a cada sección, le asigna una aplicación $\mathbb{R}$-multilineal entre campos y funciones suaves, que de hecho podemos chequear sin dificultad que es C^∞-lineal.

En el otro sentido procedemos de la siguiente forma.

Si $T : \mathfrak{X}(M)^r \times \Omega^1(M)^s \to C^\infty(M)$ es A-lineal, y $p \in M$, para cada $p \in M$ podemos considerar la aplicación $\mathrm{ev}_p \circ T$, que aplica T (eso da una función) y luego evalua en p (y da un número). Si tenemos campos X y X' (o uno formas) que coinciden en un abierto que contiene a p, podemos encontrar una funcion φ tal que $\varphi \equiv 1$ alrededor de p y $\varphi \equiv 0$ fuera de un entorno de p, de manera tal que $\varphi X = \varphi X'$, por lo tanto

$$T(X, \dots)_p = \varphi(p)T(X, \dots)_p = T(\varphi X, \dots)_p = T(\varphi X', \dots)_p = \varphi(p)T(X', \dots)_p = T(X', \dots)_p$$

Mas aún, si X esta definido en un abierto, para cada punto p del abierto podemos encontrar un campo globalmente definido y que coincida con X en un abierto que contiene a p, y por lo anterior, el valor de T en cualquier extensión de X, evaluada en p, es independiente de la extensión. Esto nos permite restringir T a abiertos.

Consideremos ahora U un abierto coordenado, con lo cual $\partial_i|_p$ y dx_p^i son base en cada punto de T_pM y T_p^*M, pero mas aun, son $C^\infty(U)$-base de $\mathfrak{X}(U)$ y $\Omega^1(U)$. Si $T|_U$ es multilineal, entonces T está determinada por el valor en bases, pues si conocemos

$$T(\partial_{i1}, \dots, \partial_{ir}, dx^{j1}, \dots, dx^{js}) =: T_{i1\dots i_r}^{j_1\dots j_s} \in C^\infty(U)$$

entonces $T(X_1, \dots, X_r, \eta^1, \dots, \eta^s)$ se calcula, primero escribiendo los campos y las formas como combinacion lineal de las derivadas parciales y los dferenciales:

$$X_i(p) = \sum_j a_i^j(p)\partial_j|_p,$$

$$\eta^i(p) = \sum_j b_j^i(p)dx_p^j$$

y ahora usando la $C^\infty(U)$-linealidad:

$$T_p(X_1, \dots, X_r, \eta^1, \dots, \eta^s) = T(\sum_{i1} a_1^{i1}(p)\partial_{i1}|_p, \cdots \sum_{ir} a_r^{ir}(p)\partial_{ir}|_p, \sum_{j1} b_1^{j1}(p)dx_p^{j1}, \cdots, \sum_{js} b_s^{is}(p)dx_p^{js})$$

$$\sum_{i1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s} a_1^{i1}(p)\cdots a_r^{ir}(p)b_1^{j1}(p)\cdots b_s^{is}(p)T(\partial_{i1}|_p, \cdots \partial_{ir}|_p, dx_p^{j1}, \cdots, dx_p^{js})$$

$$\sum_{i1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s} a_1^{i1}(p)\cdots a_r^{ir}(p)b_1^{j1}(p)\cdots b_s^{is}(p)T_{i1,\dots ir}^{j_1\dots js}(p)$$

Notamos que si queremos definir la sección asociada a traves de esto, al aplicarla a vectores $v_i \in T_pM$ y covectores $w^j \in T_pM$, si tomamos campos $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ y 1-formas $\eta^j \in \Omega^1(U)$ tales queda $v_i = X_i(p)$ y $w^j = \eta^j(p)$, la fórmula anterior nos dice que el valor de T en esos campos, evaluado en p, no depende de los campos elegidos, siempre que valgan v_i y w^j en p. $\square$

7. Más ejercicios sobre el tangente

Ejercicio 7.1. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre dos variedades diferenciables. Recordar que, dado $p \in M$, se define $f_{*_p} : T_pM \to T_f(p)N$ por*

$$f_{*_p}(v) = v \circ f$$

donde a $v \in T_p$ se lo interpreta como una derivación del germen de funciones alrededor de p en $\mathbb{R}$. Pruebe que la función $f_* : TM \to TN$ definida por

$$f_*(v) = f_{*_p}(v) \text{ si } v \in T_pM$$

es diferenciable, y hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Notar que f_* es lineal en la fibra, es decir, f_* es un morfismo de fibrados.

Ejercicio 7.2. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad, y consideremos $i_* : TM \to T\mathbb{R}^n$. Identificando el tangente a un punto de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ (via la carta identidad de $\mathbb{R}^n$), convencerse que de esta manera, el espacio tangente a un punto p de M se lo puede pensar inmerso en $\mathbb{R}^n$, dando lugar a un subespacio. De esta forma, ver que coincide con la definición primera de espacio tangente en un punto a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 7.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad definida por $f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de una cierta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable (por ejemplo, una esfera). Sea $\nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ el campo vectorial "gradiente de f", definido sobre $\mathbb{R}^n$. Considerando, para $p \in M$, $i_*(T_pM) = i_{*_p}(T_pM) \subset T_p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$, demuestre que "el tangente a p en M es ortogonal a $\nabla f|_p$", es decir,*

$$i_*(T_pM) = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \ / \ \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p = 0 \right\}$$

Ejercicio 7.4. *Sea $M = S^3$, $X_i; i = 1, 2, 3$ los siguientes campos vectoriales en la esfera conseguidos por restricción de los siguientes campos vectoriales de $\mathbb{R}^4$:*

$$X_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_3 = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

- *Verificar que son campos vectoriales en la esfera (es decir, que en cada punto de la esfera da un vector tangente, y que las funciones $X_i : S^3 \to TS^3$ son diferenciables).*
- *Con el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, verificar que en todo punto de la esfera dan una base ortonormal del tangente; probar en consecuencia que TS^3 es trivial. Usted ya lo sabía?*
- *Calcular $[X_i, X_j]$ para todo $i, j = 1, 2, 3$, y expresarlo en términos de los X_i's. Muestre que el algebra de Lie generada por X_1, X_2, X_3 isomorfa a $(\mathbb{R}^3, \times)$.*