Geometría Diferencial. Práctica 1.

2010. Primer Cuatrimestre

1) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n≥ 1 y $B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ una base. Sea $x : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $x(\sum_{i=1}^{n} a^i v_i) = (a^1, a^2, ..., a^n)$; i.e., si $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ entonces $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ es la base dual de B. Consideremos sobre V la única topología que hace de x un homeomorfismo.

a) Verificar que dicha topología no depende de B

b) Sea $\mathcal{D}$ la estructura diferenciable generada por el atlas (V, x). Probar que $\mathcal{D}$ no depende de B.

2) Sea M una variedad diferencible de dimensión m y $A \subset M$ un abierto no vacío.

a) Considerando en A la topología inducida por M , mostrar que A hereda - de manera natural - una

estructura diferenciable que hace de A una variedad diferenciable de dimensión m.

b)Deducir de los ejercicios anteriores que $Gl(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ resulta - de manera natural- una variedad

diferenciable de dimensión n^2.

3) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y D su estructura diferenciable.

a) Sean $V \subset M$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos e $y : V \to A$ un homeomorfismo . Suponiendo que

para cada $p \in V$ existe una carta $(U, x) \in D$ alrededor de p tal que $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$

es un difeomorfismo , probar que $(V, y) \in D$.

b) Sean $(U, x) \in D$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto e $y : U \to A$ una biyección tal que las funciones

$y \circ x^{-1} : x(U) \to A$ y $x \circ y^{-1} : A \to x(U)$ son diferenciables . Deducir de a) que $(U, y) \in D$

c) dado $p \in M$

i- Probar que existe $(U, x) \in D$ con $x(p) = 0$.

ii- Sea $B(0, r)$ la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen y radio $r > 0$ .Construir $(U, x) \in D$

tal que $x(p) = 0$ y $x(U) = B(0, r)$.

iii- Construir una carta $(U, x) \in D$ con $x(p) = 0$ y $x(U) = \mathbb{R}^n$.

4) Sea C una curva en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto de todos los vectores normales a C conforma una variedad tridimensional.

5) Demuestre que los siguientes conjuntos tienen estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encuentre un atlas.

a) Toro $T = S^1 \times S^1 \times .... \times S^1$ (n veces) , d=n
b)Cilindro $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; x^2+y^2=1\right\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, d=2

6) Demuestre que los siguientes conjuntos tienen una estructura diferencial de dimensión d , dada por el teorema de la función implícita.
a) $GL_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) / \det(A) \neq 0\}$, $d = (2m)^2$
b) $SL_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$
c) $SL_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) / \det(A) = 1\}$, $d = (2m)^2 - 2$
d) $O_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) / \; AA^t = 1\}$,$d = m(m-1)/2$
e) $\mathrm{SO}_{n,m}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n+m}(\mathbb{R}) / \; AI_{n,m}A^t = I_{n,m}$ y $\det(A) = 1\}$, $I_{n,m}$ es una matríz diagonal con n unos y m menos unos.
f) $U(\mathbf{m}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) / \; AA^* = 1\}$, $d = m^2$

7) En $\mathbb{R}$ definimos las cartas $(\mathbb{R}, id)$ y $(\mathbb{R}, c)$, donde $c(x) = x^3$. probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

8) Mostrar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : M \to \mathbb{R}$ depende solo de la clase de equilvalencia del atlas de X . Probar que la noción de diferenciabilidad de $f : X \to Y$ depende solo de las clases de equivalencia de los atlas de X y Y.

9) Pruebe que $id : X \to X$ es diferenciable. Pruebe que $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x,x)$ es diferenciable.

10) Pruebe que la multiplicación de matrices $GL_m(\mathbb{R}) \times GL_m(\mathbb{R}) \to GL_m(\mathbb{R})$ es diferenciable y que $i : GL_m(\mathbb{R}) \to GL_m(\mathbb{R})$, $i(x) = x^{-1}$, también. Idem para las versiones complejas $SL_m(\mathbb{C}), U(\gtrdot)$

11) Sea $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ el algebra de los cuaterniones. Es decir, el espacio vectorial de dimensión 4 con base$\{1, i, j, k\}$ con la tabla de multiplicación determinada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$. Si $w = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se define $\overline{w} = a - bi - cj - dk$. Verificar :
a) $w \cdot \overline{w} = |w|^2$, $Re(w \cdot \overline{w'}) = \langle w, w' \rangle$
b) todo elemento $w \neq 0$ es inversible.
c) La multiplicación $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es diferenciable , la inversión $\mathbb{H} \backslash \{0\} \to \mathbb{H} \backslash \{0\}$ también.
d)$S^3 = \{w \in \mathbb{H} / \; |w| = 1\}$ es un subgrupo , es variedad diferenciable de dimensión 3 , la mutiplicación e inversión son diferenciables
e) $(\mathbb{R})^\perp = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ que lo identificamos con $\mathbb{R}^3$. Si $w \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$, se define la aplicación $(\mathbb{R})^\perp \to (\mathbb{R})^\perp$ por $v = bi + cj + dk \mapsto wvw^{-1}$. Verifique que w induce la identidad ssi $w = \pm 1$. Demuestre que $|v| = \left|wvw^{-1}\right|$, y por lo tanto se tiene definida una aplicación $\mathbb{S}^3 \to O_3(\mathbb{R})$, y como $\mathbb{S}^3$ es conexo la imagen está contenida en $SO_3(\mathbb{R})$. Ver que esta aplicación es un morfismo de grupos diferenciable y de núcleo $\{1, -1\}$.