Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

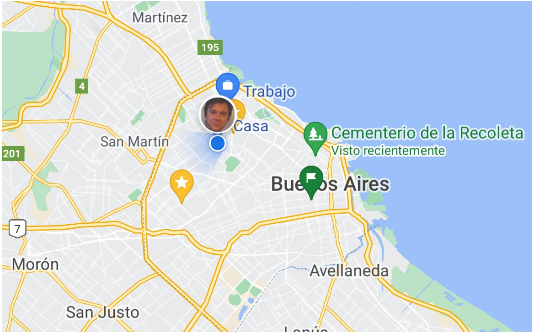
FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 9 - 2do cuatrimestre 2021
El teorema de Green

Recuerdo: Teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

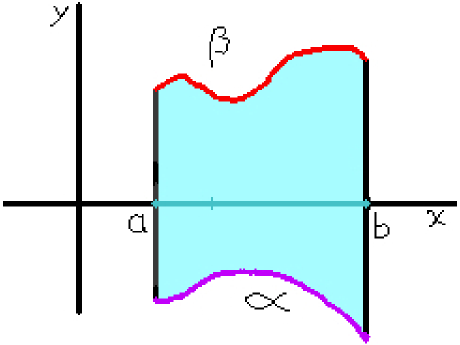
"La integral de derivadas de f en el interior de $[a, b]$ se calcula con f en el borde".

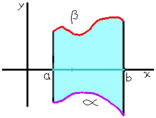


Cómo calculamos $\iint_D f(x,y)dxdy$?

Definición: D se dice de **tipo I** si es de la forma

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$





$$D = \Big\{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\Big\}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx$$

Caso fácil:

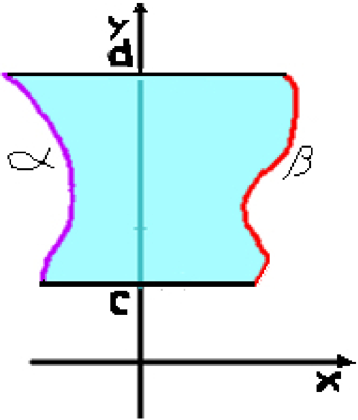
$$\iint_D \partial_y(f)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_y f(x,y)dy\Big)dx$$

$$= \int_a^b \Big(f(x,\beta(x)) - f(x,\alpha(x))\Big)dx$$

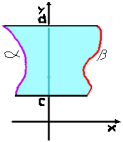
Tiene un aire a integral sobre las curvas grafico de α y de β.

Definición: D se dice de **tipo II** si es de la forma

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$



$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \Big) dy$$

Ahora el caso fácil es:

$$\iint_D \partial_x(f)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial_x f(x,y)dx \Big) dy$$

$$= \int_c^d \Big(f(\beta(y),y) - f(\alpha(y),y) \Big) dy$$

El teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral (doble) en un dominio D con una integral (curvilínea) en su borde ∂D.

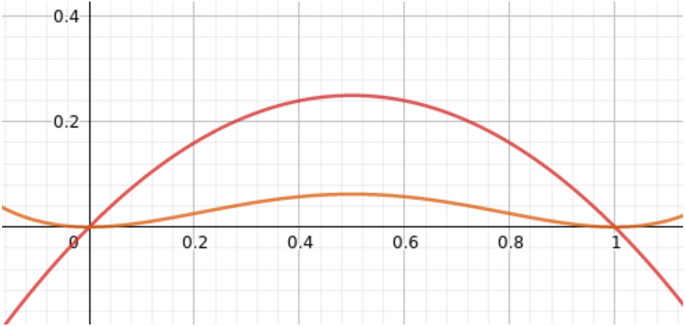
Antes de enunciarlo, un tipo mas, y orientaciones de curvas cerradas:

Definición: D se dice de **tipo III** si es (simultáneamente) de tipo I y de tipo II.

Regiones de tipo I, II y III

Ejemplos: La región

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \Big(x(x-1)\Big)^2 \le y \le x(x-1)\right\}$$



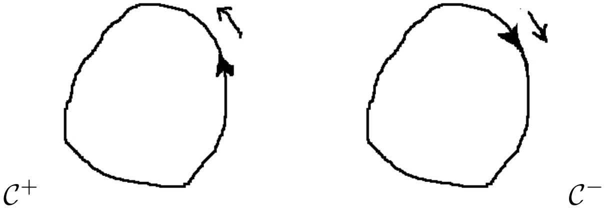
es de tipo I, pero no es de tipo II.

Un rectangulo o un disco son regiones de tipo III.

Orientaciones de curvas cerradas

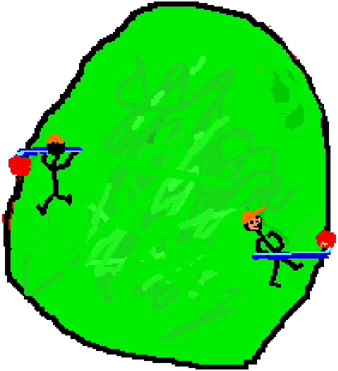
Definición Una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ que es la frontera de una región de tipo I, II o III tiene dos **orientaciones**: una recorriendo la curva en sentido contrario a las agujas del reloj y otra recorriendo la curva en el sentido de las agujas del reloj.

Nombres:



Orientación positiva del borde

Regla del golf: un jugador diestro, desde adentro del "green", si lanza la pelota tangente al borde, va en la dirección $\mathcal{C}^+$:

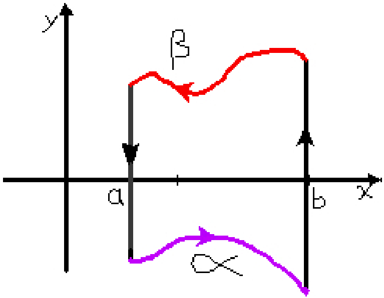


Orientación positiva del borde

Regla del golf: un jugador diestro, desde adentro del "green", si lanza la pelota tangente al borde, va en la dirección $\mathcal{C}^+$:

Curvas cerradas

Si $\mathcal{C}^+$ encierra una región de tipo I (con orientación positiva), D



$$\Rightarrow \mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup B_1 \cup B_2$$

$$\begin{array}{llcll}
\leftarrow & C_1(t) & = & \big(b-t, \beta(b-t)\big) & t \in [0, b-a] \\
\rightarrow & C_2(t) & = & \big(t, \alpha(t)\big) & t \in [a, b] \\
\uparrow & B_1(t) & = & (b, t) & t \in [\alpha(b), \beta(b)] \\
\downarrow & B_2(t) & = & \big(a, \beta(a) - t\big) & t \in [0, \beta(a) - \alpha(a)]
\end{array}$$

Ejercicio: hacer lo mismo para tipo II

Teorema: $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ que contiene a un dominio D de tipo III. Supongamos $\mathcal{C} := \partial D$ es una curva regular a trozos. La orientamos positivamente.

$$\int_{\mathcal{C}^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\, \rangle = \int_{\mathcal{C}^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

dem:

Dem

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C^+} P\,dx + \int_{C^+} Q\,dy$$

y

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Luego, el teorema quedaría probado si vemos que

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

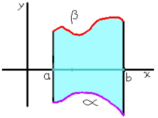
y que

$$\int_{C^+} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

O equivalentemente, si probamos el teorema para los casos $F = (P, 0)$, y para $F = (0, Q)$

Caso $\vec{F} = (P, 0)$

Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), 0)$, como D es de tipo III $\Rightarrow$ es de tipo I, recordamos

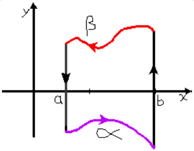


$$D = \Big\{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\Big\}$$

$$-\iint_D \partial_y P dxdy = -\int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_y P(x,y)dy\Big)dx$$

$$= -\int_a^b \Big(P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x))\Big)dx$$

Ahora integramos $\vec{F}$ en $\mathcal{C}^+$:

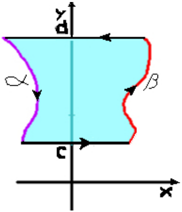


$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup B_1 \cup B_2$$
$$\vec{F} = (P, 0)$$

$$\begin{array}{rclcccc}
 & & \sigma(t) & t \in & \langle \vec{F}, \sigma'(t) \rangle dt & & \\
C_1(t)^{op} & = & (t, \beta(t)) & [a,b] & \langle (P,0), (1, \beta'(t) \rangle dt & = & P(t, \beta(t))dt \\
C_2(t) & = & (t, \alpha(t)) & [a,b] & \langle (P,0), (1, \alpha'(t)) \rangle dt & = & P(t, \alpha(t))dt \\
B_1(t) & = & (b, t) & [\alpha(b), \beta(b)] & \langle (P,0), (0,1) \rangle dt & = & 0 \\
B_2(t)^{op} & = & (a, t) & [\alpha(a), \beta(a)] & \langle (P,0), (0,1) \rangle dt & = & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{C_1^{op}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_a^b P(t, \beta(t))dt + \int_a^b P(t, \alpha(t))dt \checkmark$$



$\boxed{\text{Caso } \vec{F} = (0, Q(x,y))}$ D tipo III $\Rightarrow$ tipo II,

$$D = \Big\{(x,y) : c \le y \le d, \alpha(y) \le x \le \beta(y)\Big\}$$

$$\iint_D \partial_x Q dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial_x(Q)dx\Big)dy = \int_a^b \Big(Q(\beta(y),y) - Q(\alpha(y),y)\Big)dy$$

$$\begin{array}{rclccl}
 & & \sigma(t) & t \in & \langle \vec{F},\ \sigma'(t)\rangle dt & \\
C_1(t) & = & \big(\beta(t),t\big) & [c,d] & \langle (0,Q),\ (\beta'(t),1)\rangle dt & = Q(\beta(t),t)dt \\
C_2(t)^{op} & = & \big(\alpha(t),t\big) & [c,d] & \langle (0,Q),\ (\alpha'(t),1)\rangle dt & = Q(\alpha(t),t)dt \\
B_1(t) & = & (t,c) & [\alpha(c),\beta(c)] & \langle (0,Q),(1,0)\rangle dt & = 0 \\
B_2(t)^{op} & = & (t,d) & [\alpha(d),\beta(d)] & \langle (0,Q),(1,0)\rangle dt & = 0
\end{array}$$

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} - \int_{C_2^{op}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_c^d Q(\beta(t),t)dt - \int_c^d Q(\alpha(t),t)dt \ \checkmark$$

Ejemplo:

Sea $F(x, y) = (y, 0)$, $\mathcal{C}^+$=círculo de radio 1, antihorario.

$$\int_{\mathcal{C}^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\, \rangle = ?$$

Cálculo directo: parametrizamos $c(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$,

$$\int_{\mathcal{C}^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\, \rangle = \int_{\mathcal{C}^+} \langle \vec{F}(c(t)), c'(t) \rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (\operatorname{sen}(t), 0),\ (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2(t) dt = \cdots$$

usando Green: observamos $\mathcal{C}^+ = \partial D^+$, con D=disco de radio 1

$$\int_{\partial D^+} P dx + Q dy = \int_{\mathcal{C}^+} y dx = \iint_D -\partial_y y \; dxdy = \iint_D -1 \; dxdy$$

$$= -Area(Disco) = -\pi$$

Ejemplo: cálculo de área

Proposición:

D un dominio de tipo III con ∂D curva regular a trozos, entonces

$$Area(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} \langle (-y,x), d\vec{\ell}\,\rangle$$

dem:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \big(\partial_x(x) - \partial_y(-y)\big)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (1+1)dxdy = \iint_D 1dxdy = Area(D)$$