Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 8 - 2do cuatrimestre 2021
Integrales en superficies: reparametrizaciones e invarianza por reparametización

Flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ en la dirección de N

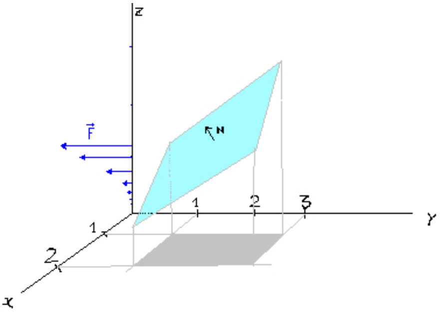
- $\mathcal{S}$ superficie que admite un campo vectorial N NORMAL nunca nulo en $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{S} = Im(T)$, $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ una parametrización regular.
- $\forall p = T(u,v)$, $T_u \times T_v$ apunta *para el mismo lado* que $N(p)$.
- $\vec{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ continuo

Se define

$$\iint_{\mathcal{S},N} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle := \iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle du dv$$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (0, -z^2, 0)$, y $\mathcal{S}$ el siguiente gráfico:

$$\mathcal{S} = \Big\{(x,y,z) : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3,\ \ z = 2 - x + y\Big\}$$



$$T : [1,2] \times [1,3] \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x, y, 2 - x + y)$$

$$\int_1^2 \int_1^3 \langle \vec{F}(x,y,2-x+y), \overbrace{(1,0,-1) \times (0,1,1)}^{ver\ \ para\ \ donde\ \ apunta} \rangle dxdy$$

$$\int_1^2 \int_1^3 \langle \vec{F}(x, y, 2 - x + y), (1, 0, -1) \times (0, 1, 1) \rangle dx dy$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & -(2-x+y)^2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = +(2 - x + y)^2 \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\therefore \iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle = \int_1^2 \Big(\int_1^3 (2 - x + y)^2 dy \Big) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3} (2 - x + y)^3 \Big|_{y=1}^{y=3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \Big((2 - x + 3)^3 - (2 - x + 1)^3 \Big) dx = \cdots = \frac{40}{3}$$

Reparametrizaciones

Objetivo:

Teorema:

1. La integral de campo vectorial (flujo) $\iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle$ no depende de la parametrización, siempre que preserve la orientación.
Si no preserva la orientación, la integral cambia de signo.

2. La integral en una superficie de un campo escalar $\iint_{\mathcal{S}} \varphi dA$ no depende de la parametrización.

Empezamos con el siguiente cálculo:

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (a\vec{v} + b\vec{w}) \times (c\vec{v} + d\vec{w}) = (ad - bc)\ \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\ \vec{v} \times \vec{w}$$

Reparametrizaciones

Sea $T : D \to \mathcal{S}$ una parametrización, dados $(u, v) \in D$ calculamos

$$T_u,\ T_v$$

Sea $g : D^* \to D$ una biyección con g y $g^{-1} \in C^1$.

$$g(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$$

Con esto, obtenemos *otra* parametrización $T^* : D^* \to \mathcal{S}$

$$T^*(s, t) = T(u(s, t), v(s, t)) = (T \circ g)(s, t)$$

Podemos calcular T^*_s, T^*_t, y $T^*_s \times T^*_t$:

Afirmamos:

$$T_s^* = \partial_s\Big(T(u(s,t),v(s,t))\Big) = T_u\partial_s u + T_v\partial_s v$$

$$T_t^* = \partial_t\Big(T(u(s,t),v(s,t))\Big) = T_u\partial_t u + T_v\partial_t v$$

Pues, por ejemplo

$$T_s^* = \partial_s\Big(T(u(s,t),v(s,t))\Big)$$

$$= \partial_s\Big(X(u(s,t),v(s,t)), Y(u(s,t),v(s,t)), Z(u(s,t),v(s,t))\Big) =$$

$$= \Big(\partial_s\big(X(u(s,t),v(s,t))\big), \partial_s\big(Y(u(s,t),v(s,t))\big), \partial_s\big(Z(u(s,t),v(s,t))\big)\Big)$$

y calculamos coordenada a coordenada:

$$\partial_s\big(X(u(s,t),v(s,t))\big) = \partial_u X\partial_s u + \partial_v X\partial_s v$$

idem Y, Z.

$$T_s^* = \partial_s\Big(T(u(s,t), v(s,t))\Big) = T_u \partial_s u + T_v \partial_s v$$

$$T_t^* = \partial_t\Big(T(u(s,t), v(s,t))\Big) = T_u \partial_t u + T_v \partial_t v$$

tomando $a = \partial_s u$, $b = \partial_s v$, $c = \partial_t u$, $d = \partial_t v$, tenemos

$$T_s^* \times T_t^* = (aT_u + bT_v) \times (cT_u + dT_v)$$

$$= (ad - bc) T_u \times T_v$$

$$= \det(Dg) T_u \times T_v = J_g T_u \times T_v$$

Notar que a la derecha, T_u y T_v estan expresados en términos de $(u(s,t), v(s,t)) = g(s,t)$, por lo que tenemos en realidad

$$J_g (T_u \times T_v) \circ g$$

Consecuencia: tenemos una fórmula para usar el T.C. Variable:

Reparametrizaciones

Sea $T : D \to \mathcal{S}$ una parametrización regular. Supongamos que $g : D^* \to D$ es una biyección C^1 con inversa C^1.

$$g(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$$

Consideramos la *otra* parametrización de la misma superficie

$$T^*(s,t) = T(u(s,t), v(s,t)) = (T \circ g)(s,t)$$

Entonces

$$T^*_s \times T^*_t = J_g \; (T_u \times T_v) \circ g$$

$$\|T^*s \times T^*_t\| = |J_g| \; \|T_u \times T_v\| \circ g$$

Si $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es una función escalar, $\iint_{\mathcal{S},T^*} \phi dA =$

$$= \iint_{D^*} \phi(T^*(s,t))\|T^*_s \times T^*_t\| dsdt = \iint_{D^*} \phi(T \circ g) \; |J_g| \; \|T_u \times T_v\| \circ g \; dsdt$$

$$= \iint_D \phi(T(u,v))\|T_u \times T_v\| dudv = \iint_{\mathcal{S},T} \phi \; dA$$

Reparametrizaciones

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial y $\mathcal{S}$ es un asuperficie *orientada*, suponiendo que $T_s \times T_t$ apunta para el mismo lado que N

$$\iint_{\mathcal{S},N,T^*} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle = \iint_{D^*} \langle \vec{F}(T^*(s,t)), T_s^* \times T_t^* \rangle dsdt$$

$$= \iint_{D^*} \langle \vec{F}(T^*(s,t)), J_g (T_u \times T_v) \circ g \rangle dsdt$$

$$= \iint_{D^*} \langle \vec{F} \circ T \circ g, (T_u \times T_v) \circ g \rangle J_g dsdt$$

Si $J_g > 0$ (i.e. $T_u \times T_v$ apunta para el mismo lado que $T_s^* \times T_t^*$), $\Rightarrow J_g = |J_g|$ y (TCV)

$$= \iint_{D} \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv$$

Si $J_g < 0 \Rightarrow J_g = -|J_g|$, en ese caso da

$$= - \iint_{D} \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv$$

Teorema

Sean

$$T : D \to \mathcal{S}, \quad T^* : D^* \to \mathcal{S}$$

dos parametrizaciones regulares de una misma superficie $\mathcal{S}$.
Entonces, $\exists$ biyección $g : D^* \to D$ con g y $g^{-1} \in C^1$ tal que

$$T^* = T \circ g$$

dem: (idea) Es fácil encontrar g:

$$(s,t) \in D^* \Rightarrow T^*(s,t) = p \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \exists!(u,v) : p = T(u,v)$$

definimos $\boxed{g(s,t) = (u,v) = T^{-1}(p) = T^{-1}(T^*(s,t))}$
Claramente

$$T(g(s,t)) = T(u,v) = p = T^*(s,t)$$

es decir, $T^* = T \circ g$.
Lo difícil es ver que g es C^1. Veamos un caso particular

Supongamos que $\mathcal{S}$ es un gráfico

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

y que $T(x, y) = (x, y, f(x, y))$. A su vez,

$$T^* : D \to graf(f)$$

$$T^*(s,t) = \big(X(s,t), Y(y,t), Z(s,t)\big)$$

$Im(T^*) = \mathcal{S} = graf(f) \iff Z(s,t) = f\big(X(s,t), Y(s,t)\big)$.
La fórmula anterior nos da

$$T^*(s,t) = \big(X(s,t), Y(y,t), Z(s,t)\big)$$

$$= \Big(X(s,t), Y(y,t), f\big(X(s,t), Y(s,t)\big)\Big) = T\big(X(s,t), Y(y,t)\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(s,t) = \big(X(s,t), Y(s,t)\big)}$$

es claramente C^1 porque T^* lo era. Para ver que g^{-1} es C^1

Calculamos T_s^* y T_t^*:

$$T_s^* = (X_s, Y_s, Z_s),\ T_t^* = (X_t, Y_t, Z_t),$$

Pero recordamos $Z = f(X, Y)$, entonces

$$Z_s = \partial_s \Big(f \big(X(s,t), Y(s,t) \big) \Big) = f_x X_s + f_y Y_s$$

$$Z_t = \partial_t \Big(f \big(X(s,t), Y(s,t) \big) \Big) = f_x X_t + f_y Y_t$$

Como T_s^* y T_t^* son l.i., miramos la matriz 2×3

$$\begin{pmatrix} T_s^* \\ T_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_s & Y_s & Z_s \\ X_t & Y_t & Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_s & Y_s & f_x X_s + f_y Y_s \\ X_t & Y_t & f_x X_t + f_y Y_t \end{pmatrix}$$

La ultima columna es comb. lin. de las otras $\Rightarrow \begin{pmatrix} X_s & Y_s \\ X_t & Y_t \end{pmatrix}$ es inversible, y g^{-1} resulta C^1 por el T.F. Inversa.

Repaso de las integrales vistas:

- $\mathcal{C}$ una curva, $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular

$$\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \qquad \int_{\mathcal{C}} \phi d\ell = \int_a^b \phi(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt$$

$$\vec{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n, \qquad \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

- $\mathcal{S}$ una superficie, $T : D \to \mathcal{S}$ una parametrización regular

$$\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, \qquad \iint_{\mathcal{S}} \phi dA = \iint_D \phi(T(u,v)) \|T_u \times T_v\| du dv$$

$$\vec{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n, \qquad \iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle = \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle du dv$$

Las escalares no dependen de la reparametrización, las vectoriales cambian de signo cuando cambia la orientación.