Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

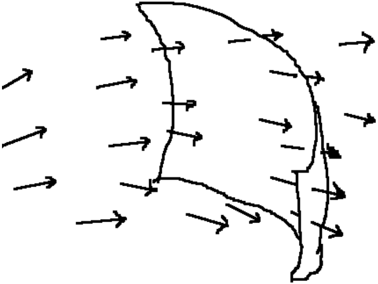
FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

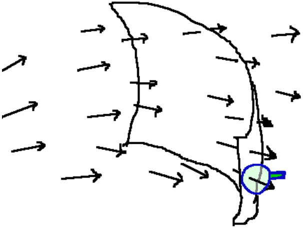
Teóricas - clase 7 - 2do cuatrimestre 2021
Integrales en superficies: flujo de un campo vectorial

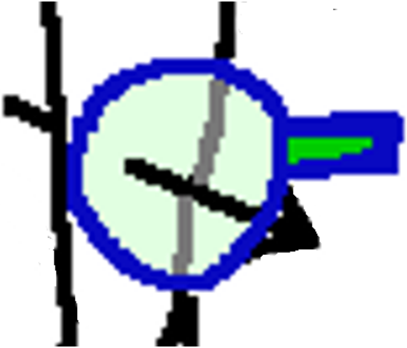
Integrales de campos vectoriales: cálculo de flujo

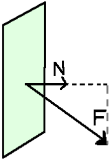
Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $\mathcal{S}$ una superficie en donde tiene sentido definir "dos caras", o un "sentido de atravesarla".

Queremos calcular el flujo del campo vectorial "atravesando la superficie":



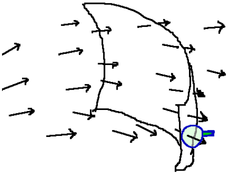
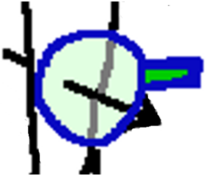
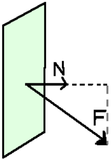






En un paralelogramo plano, si $\vec{F}$ cte, el flujo es

$$Area(paralelogramo) \cdot \langle \vec{F}, N \rangle$$



Si el paralelogramo está dado por los vectores $T_u \Delta u$ y $T_v \Delta v$,

$$Area(paralelogramo) = ||T_u \times T_v|| \Delta u \Delta v$$

Si $N = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$ (OJO: puede ser N o $-N$)

$$\Rightarrow \langle \vec{F}, N \rangle = \langle \vec{F}, \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||} \rangle$$

$$\therefore Area \cdot \langle \vec{F}, N \rangle \sim \left(||T_u \times T_v|| \Delta u \Delta v \right) \langle \vec{F}, \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||} \rangle = \langle \vec{F}, T_u \times T_v \rangle \Delta u \Delta v$$

sumando sobre todos los paralelogramos llegamos a:

Definición de Flujo de un campo a través de una superficie

- $\mathcal{S}$ superficie que admite un campo vectorial N NORMAL nunca nulo en $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{S} = Im(T)$, $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ una parametrización regular.
- $\forall p = T(u, v)$, $T_u \times T_v$ apunta *para el mismo lado* que $N(p)$.
- $\vec{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ continuo

Definimos

$$\iint_{\mathcal{S},N} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle := \iint_D \vec{\langle} F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv$$

Notar

$$\iint_D \vec{\langle} F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle dudv = \iint_D \vec{\langle} F(T(u,v)), N \rangle ||T_u \times T_v|| dudv$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \langle F, N \rangle dA$$

Ejemplo:

$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{r^{n+1}}(x, y, z) = \frac{p}{r^{n+1}}$$

(campo radial con $||\vec{F}|| = 1/r^n$)
$\mathcal{S}_R$= esfera de radio R,
N(x,y,z)= la normal *exterior* = $\frac{1}{R}(x, y, z) = \frac{p}{R}$.

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}_R} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle = \iint_{\mathcal{S}_R} \langle \vec{F}, N \rangle dA = \iint_{\mathcal{S}_R} \langle \frac{p}{R^{n+1}}, \frac{p}{R} \rangle dA$$

$$= \iint_{\mathcal{S}_R} \frac{||p||^2}{R^{n+1}R} dA = \iint_{\mathcal{S}_R} \frac{R^2}{R^{n+2}} dA$$

$$= \iint_{\mathcal{S}_R} \frac{1}{R^n} dA = \frac{1}{R^n}\ Area(\mathcal{S}_R) = \frac{4\pi}{R^{n-2}}$$

Por ejemplo, si $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{r^3}(x, y, z)$, el flujo no depende del radio.

Superficies – Orientación

Definición: una superficie $\mathcal{S}$ se dice orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único vector normal $N(P)$ ($N(P)$ es perpendicular la plano tangente y tiene módulo 1) de modo que la función vectorial que resulta de esta elección resulte continua en $\mathcal{S}$.

Ejemplo: Una superficie de nivel de una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$$

que verifica $\nabla F|_P \neq 0, \forall P \in \mathcal{S}$ es orientable, con

$$N(p) := \frac{\nabla F|_P}{||\nabla F|_P||}$$

La esfera, un plano, un gráfico...

Superficies – Orientación: Caso gráfico

Si $\mathcal{S}$ es un gráfico,

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

se puede elegir

$$N(x, y, f(x, y)) = \frac{(-\partial_x, f, -\partial_y f, 1)}{||(-\partial_x, f, -\partial_y f, 1)||}$$

es un normal que apunta “hacia arriba”.

Superficies – Orientación

$\mathcal{S}$ una superficie que admite una parametrización regular
$\Rightarrow \mathcal{S}$ es orientable, pues se puede definir

$$N(T(u,v)) = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$$

Pero si la parametrización T deja de ser inyectiva, $\mathcal{S}$ podrá ser no orientable aunque se tenga $T_u \times T_v \neq 0$ en todos lados. Esta es la situación con la Cinta de Moebius.

Notar que si $\mathcal{S} = Im(T)$, T una parametrización regular, entonces
o bien $N(T(u,v)) = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$ o bien $-N(T(u,v)) = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$.

En el primer caso, decimos que la parametrización está bien orientada, o que $\mathcal{S}$ está orientada por T.