Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

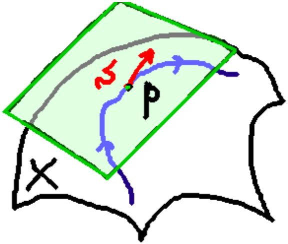
FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 6 - 2do cuatrimestre 2021
Espacio tangente

Vectores tangentes

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in X$. Decimos que $\vec{v}$ es una dirección tangente a X que pasa por p si existe $\sigma : (-a, a) \to X$ curva C^1 con

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma'(0) = \vec{v}$$



Definición: el espacio tagente a X que pasa por p es

$$p + T_pX := p + \left\{\vec{v} : \exists \sigma / Im(\sigma) \subseteq X,\ \sigma(0) = p,\ \sigma'(0) = \vec{v}\right\}$$

Ejemplo en un gráfico

$$X = graf(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

$p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)), (x_0, y_0) \in D^0$

$\sigma_1(t) = (x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0)) \Rightarrow \sigma_1'(0) = (1, 0, \partial_x f|_{(x_0 y_0)}) = \vec{v}$

$\sigma_2(t) = (x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t)) \Rightarrow \sigma_2'(0) = (0, 1, \partial_y f|_{(x_0 y_0)}) = \vec{w}$

son dos direcciones tangentes. Más aún

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t))$$

$$\sigma_{\alpha,\beta}'(0) = (\alpha, \beta, \alpha\partial_x f|_{(x_0 y_0)} + \beta\partial_y f|_{(x_0 y_0)}) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

$\therefore$ el espacio tangente $\supseteq \{p +$ generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}\}$

Ejemplo de superficie de nivel

$$X = \left\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\right\}$$

Si $\sigma : (-a, a) \to X$, entonces

$$F(\sigma(t)) = 0, \forall t \in (-a, a)$$

Si $g(t) = F(\sigma(t))$ (y $\mathrm{Im}(\sigma) \subset X$) entonces g es la función nula $\Rightarrow g'(t) = 0\ \forall t$, pero también

$$0 = \frac{d}{dt}(F(\sigma(t)) = \langle \nabla F|_{\sigma(t)}, \sigma'(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sigma'(0) \perp \nabla F|_{p=\sigma(0)}, \qquad \therefore\ p + T_pX \subseteq p + \nabla F|_p^{\perp}$$

Conclusión:

Planos tangentes en una superficie regular

Conclusión: Con la definición que tomamos de espacio tangente,

si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y $p \in \mathcal{S}$, entonces su espacio tangente es un plano (que pasa por p).

Veamos los casos gráfico, sup. de nivel, y sup. parametrizada:

Caso gráfico

$$X = \Big\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\Big\}, \;\; p = (x_0, y_0, z_0)$$

con $z_0 = f(x_0, y_0)$, tenemos el plano tangente

$$p + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$$

donde $\vec{v} = \big(1, 0, \partial_x f|_{(x_0,y_0)}\big)$, $\vec{w} = \big(0, 1, \partial_y f|_{(x_0,y_0)}\big)$.

Un vector normal (perpendicular) es $\vec{v} \times \vec{w}$=

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = \big(-\partial_x f, -\partial_y f, 1\big)$$

La ecuación del plano es

$$\langle (x, y, z) - p \,,\; \vec{v} \times \vec{w}\rangle = 0$$

o equivalentemente...

Caso gráfico

La ecuación del plano es

$$\langle (x,y,z)-p\ ,\ \vec{v}\times\vec{w}\rangle = 0$$

$\vec{v}\times\vec{w} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$

$$\rightsquigarrow \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\ ,\ (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)\rangle = 0$$

es decir,

$$-\partial_x f|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) - \partial_y f|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + 1\cdot(z-z_0) = 0$$

o bien

$$\boxed{z - z_0 = \partial_x f|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \partial_y f|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)}$$

Caso superficie de nivel

$$X = \Big\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\Big\}$$

$p = (x_0, y_0, z_0)$, $F(p) = 0$, $\nabla F|_p \neq (0, 0, 0)$.

La ecuación del plano es

$$\langle (x, y, z) - p \ , \ \nabla F|_p \rangle = 0$$

o bien

$$\boxed{\boxed{\partial_x F|_p (x - x_0) + \partial_y F|_p (y - y_0) + \partial_z F|_p (z - z_0) = 0}}$$

Caso superficie parametrizada

$$T : D \to \mathbb{R}^3,\ T(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)),\ X = Im(T)$$

$$T_u = (\partial_u X, \partial_u Y, \partial_u Z),\ \ T_v = (\partial_v X, \partial_v Y, \partial_v Z)$$

$$p = T(u_0, v_0) = (X(u_0,v_0), Y(u_0,v_0), Z(u_0,v_0)) = (x_0, y_0, z_0),$$

La ecuación del plano es

$$\left\langle (x,y,z) - p\ ,\ T_u|_{(u_0,v_0)} \times T_v|_{(u_0,v_0)} \right\rangle = 0$$

o bien

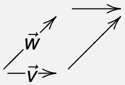
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \partial_u X & \partial_u Y & \partial_u Z \\ \partial_v X & \partial_v Y & \partial_v Z \end{vmatrix} = 0$$

o bien

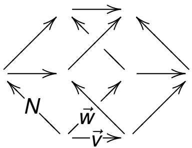
$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_u Y \partial_v Z - \partial_u Z \partial_v Y)(x - x_0) + \\ &+ (\partial_u Z \partial_v X - \partial_u X \partial_v Z)(y - y_0) + (\partial_u X \partial_v Y - \partial_u Y \partial_v X)(z - z_0) \end{aligned}$$

Cálculo de áreas:

Hecho: $||\vec{v} \times \vec{w}||$ = área del paralelogramo



Dem: Si N es un tercer vector, entonces el volumen de



es $|\det(N, \vec{v}, \vec{w})| = |\langle N, \vec{v} \times \vec{w} \rangle|$.

Si además $N \perp \vec{v}$ y $N \perp \vec{w}$,

$$\Rightarrow \quad Vol = ||N|| \cdot \text{área paralelogramo}$$

Cálculo de áreas:

$N \perp \vec{v}$ y $N \perp \vec{w}$, el volumen es

$$Vol = ||N|| \cdot \text{área paralelogramo}$$

Tomamos N de norma 1:

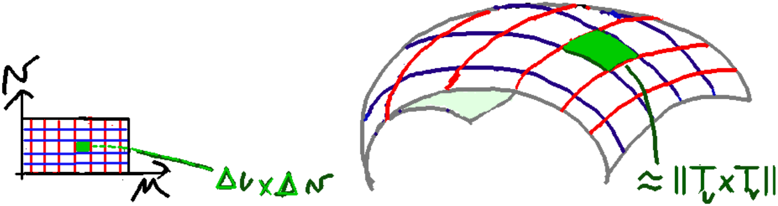
$$N = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{||\vec{v} \times \vec{w}||}$$

entonces

$$area = 1 \cdot area = Vol = |\det(N, \vec{v}, \vec{w})|$$

$$= \langle N, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \left\langle \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{||\vec{v} \times \vec{w}||}, \vec{v} \times \vec{w} \right\rangle = \frac{||\vec{v} \times \vec{w}||^2}{||\vec{v} \times \vec{w}||}$$

$$= ||\vec{v} \times \vec{w}||$$



Si $\mathcal{S} = ImT$, $T : D \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular,

$$Def: \qquad Area(\mathcal{S}) := \iint_D ||T_u \times T_v|| dudv$$

Si $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es continua,

$$Def: \qquad \iint_{\mathcal{S}} \rho dA := \iint_D \rho(T(u,v)) \, ||T_u \times T_v|| \, dudv$$