Análisis II - Matemática 3
Análisis Matematico II

Marco Farinati

FCEN UBA mfarinat@dm.uba.ar

Teóricas - clase 5 - 2do cuatrimestre 2021
Introducción a Superficies en $\mathbb{R}^3$

Superficies – Parametrizaciones y ecuaciones

Definición 1: Una *superficie paramétrica* es un conjunto de puntos del espacio que puede describirse por medio de dos parámetros:
$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie paramétrica si $\exists$ funciones continuas $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ definidas en un dominio elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ si y sólo si existe $(u,v) \in D$ con $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$, $z = Z(u,v)$.

En este caso, llamamos a $T : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(u,v) = \big(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)\big)$$

una parametrización de $\mathcal{S}$.

Superficies – Parametrizaciones y ecuaciones

Ejemplo: si $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un dominio elemental D del plano, su gráfico:

$$graf(f) = \Big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D\Big\}$$

se puede parametrizar por $T(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

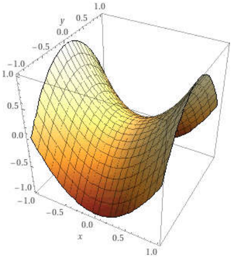
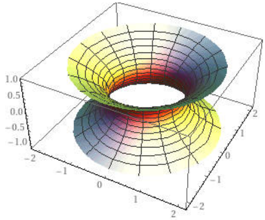


Gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in D = [-1, 1] \times [-1, 1]$

La superficie parametrizada por

$$T(u, v) : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u, v) = (cos(u)(v^2 + 1), sen(u)(v^2 + 1), v).$$



no es el gráfico de ninguna función.

Verifica las ecuaciónes $\sqrt{x^2 + y^2} = z^2 + 1$, $-1 \leq z \leq 1$

Superficies – Parametrizaciones y ecuaciones

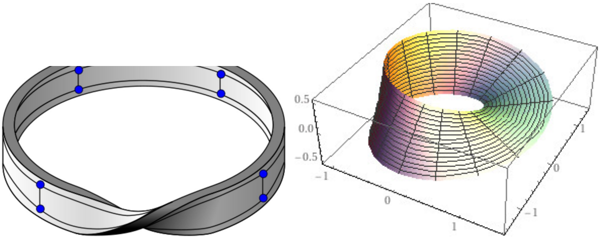


Figura: Dos "bandas de Moebius"

Moebius

$$T(u,\theta) : [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u,\theta) = \Big((1 + cos(\tfrac{\theta}{2})u)cos(\theta)\ ,\ (1 + cos(\tfrac{\theta}{2})u)sen(\theta)\ ,\ sen(\tfrac{\theta}{2})u \Big)$$

Superficies de nivel:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = c\}$$

Por ejemplo: paraboloide elíptico, cono, esfera:

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

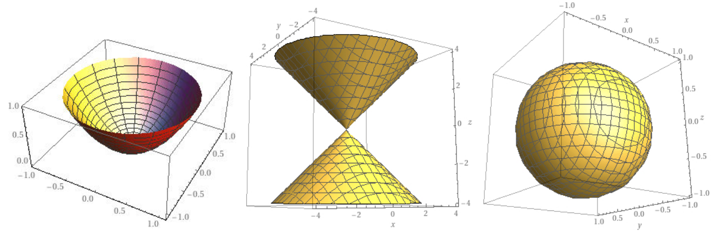


Figura: Ejercicio: hallar parametrizaciones.

Convención: Sea "blabla" un adjetivo. Diremos que un conjunto $\mathcal{S}$ es *localmente* blabla si para todo $p \in \mathcal{S}$ existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap \mathcal{S}$ es blabla.

Por ejemplo, podemos hablar de conjuntos que son localmente gráficos, o localmente superficie de nivel, o localmente parametrizables, etc.

Por ejemplo, la esfera

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

no es globalmente un gráfico, pero sí es localmente un gráfico (c.r.a. alguna de las variables). A su vez es globalmente una superficie de nivel.

Superficies suaves: estructura local

Teorema: Son equivalentes:

- $\mathcal{S}$ es localmente un gráfico (c.r.a. alguna de las variables) de alguna función C^1 de dos variables
- $\mathcal{S}$ es localmente una superficie de nivel de una función C^1 de tres variables que no se anula su gradiente.
- $\mathcal{S}$ es localmente la imagen de una parametrización $T : D \to \mathbb{R}^3$ con D un abierto de $\mathbb{R}^2$ y
  - T inyectiva, homeo con su imagen,
  - T de clase C^1,
  - si $T(u,v) = \big(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)\big)$ y

$$T_u := (\partial_u X, \partial_u Y, \partial_u Z),\ \ T_v := (\partial_v X, \partial_v Y, \partial_v Z)$$

$\forall\ (u,v) \in D$ los vectores $\{T_u,\, T_v\}$ son l.i.

Definición: Una superficie regular es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que es localmente un gráfico de una función C^1
(o equivalentemente loc. una sup. de nivel regular,
o la imagen de una param. regular)

Notar el cono $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es regular en $(0, 0, 0)$.

Sobre la dem. de la equivalencia:

Recuerdo del producto vectorial:

$$\vec{v} = (a_1, b_1, c_1), \ \ \vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_1 a_2 - a_1 c_2, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} k$$

Propiedades importantes:

- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$,
- $\vec{v} \times \vec{w}$ es lineal en $\vec{v}$ y lineal en $\vec{w}$,
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$
- $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \qquad \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}.$
- $\{\vec{v}, \vec{w}\} l.i \iff \vec{v} \times \vec{w} \neq 0$

Aplicaciones

Si Π es le plano generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$, llamando

$$(a, b, c) := \vec{v} \times \vec{w}$$

entonces la ecuación del plano es

$$ax + by + cz = 0$$

Si $T(u, v)$ es una parametrización regular de $\mathcal{S}$, la condición $\{T_u, T_v\}$ l.i. se puede escribir como $T_u \times T_v \neq 0$.

Veremos luego la definición de plano tangente;
los vectores T_u y T_v serán naturalmente vectores tangentes, entonces $T_u \times T_v$ lo podremos utilizar para calcular la ecuación del plano tangente a la superficie en cada punto.